ÚVOD DO VARIAČNÍHO POČTU

Klasická (reálná) analýza (real analysis / differential calculus – diferenciální počet)

- zkoumá vlastnosti (reálných) **funkcí**
- objekt studia $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\quad d \geq 1$ **FUNKCE**

  $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$

  $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$
- mimojiné zkoumá **extrémy funkcí** (lokální minima / max.)

Víme z 1. roč.:

(1) Je-li $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, pak f nabývá v K minimum / maximum

(2) Je-li $f : U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f má v x_0 extrém a $f'(x_0)$ existuje $\Big\}$ pak $f'(x_0) = 0$

(3) Je-li $f : U(x_0) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d > 1$, f má v x_0 extrém, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ existují pro $i = 1, \dots, d$ $\Big\}$ pak $\nabla f(x_0) = 0$

$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall\, |\vec{v}| = 1$

Derivace f v $\vec{x}_0$ ve směru $\vec{v}$, $\quad \partial_{\vec{v}} f(x_0)$,
(směrová derivace f v x_0)
definovaná vztahem

$$\partial_{\vec{v}} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

je koncept, který bude vhodný pro derivování v prostorech ∞-dimenze, tedy ve variačním počtu.

$\boxed{\text{Variační počet}}$ Calculus of variations

kritické body

- zkoumá minima/maxima neboli $\boxed{\text{extremály funkcionálů}}$
- objekt studia $\boxed{\text{funkcionál}}$ zobrazení z normovaného prostoru funkcí do $\mathbb{R}$

$$\mathcal{L} : \left(X, \|\cdot\|_X\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Příklady prostorů } X}$

- $C(\langle a,b\rangle)$, $C^k(\langle a,b\rangle)$, ..., $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
- $L^2(\langle a,b\rangle)$, $L^p(\langle a,b\rangle)$ Lebesgueovy prostory
- $W^{1,2}(\langle a,b\rangle)$, $W^{k,p}(\langle a,b\rangle)$ Sobolevovy prostory

Příklady funkcionálů a úloh variačního počtu

① Buď $\vec{\gamma} : [0,T] \to \mathbb{R}^s$ (křivka, trajektorie, pohyb, funkce)

geometr, fyzik, inženýr, matematik

(Funkcionál) $\boxed{\text{délka křivky}}$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] := \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^{s} [\gamma_i'(t)]^2}\, dt$$

Speciálně $(s=2)$

- $\vec{\gamma}(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi)$ zobecněné polární souřadnice

$\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \mathcal{L}[r] = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

- Křivka daná grafem funkce $\langle \vec{\gamma} \rangle = \{(x, y(x));\ x \in \langle a,b\rangle\}$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \boxed{\mathcal{L}[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}$$

Uvažujme na chvíli jen tento funkcionál ↑.
Zformulujme tři minimalizační úlohy.

$$\boxed{(R)\int_a^b f(x)\,dx \text{ existuje}}$$

$$\Updownarrow$$

DOLNÍ Riemannův $\int$ existuje & HORNÍ Riemannův $\int$ existuje

$$\sup_D \underbrace{s(D,f)} \qquad\qquad \inf S(D,f)$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - x_{i-1}) \qquad\qquad \sum_{i=1}^{N} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

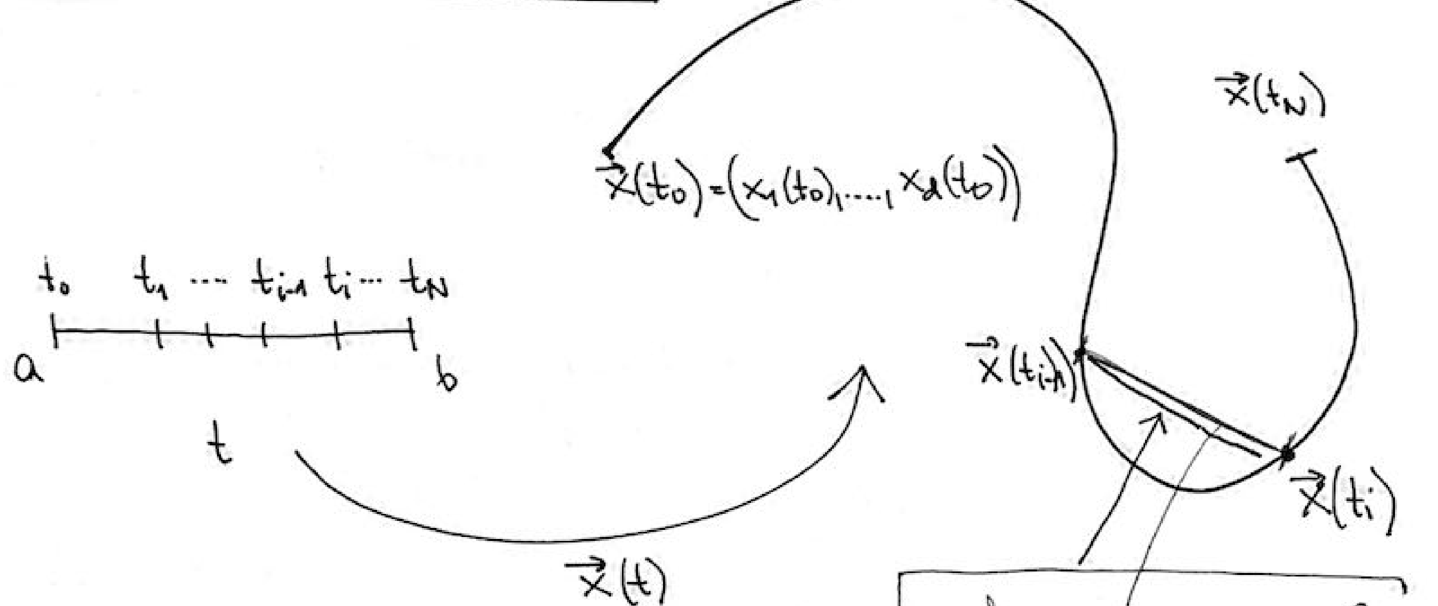
$$\inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) \qquad\qquad \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}$$

approximace Riemannova integrálu

$$\boxed{(R)\int_a^b f(x)\,dx} \approx \boxed{\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})}$$

FUNKCIONÁLY DÉLKY KŘIVKY



$$\sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j(t_i) - x_j(t_{i-1})\right)^2}$$

$$L[\vec{x}] \approx \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}))^2}$$

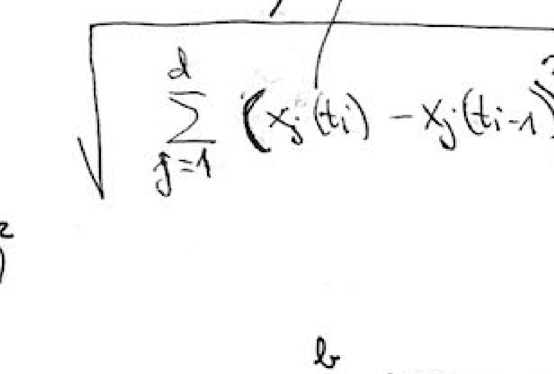
$$\overset{\text{LVOSH}}{=} \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j'(\xi_j)\right)^2}\,(t_i - t_{i-1}) \approx \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j'(t))^2}\,dt$$

$$= \int_a^b \|\vec{x}'(t)\|_E\,dt$$

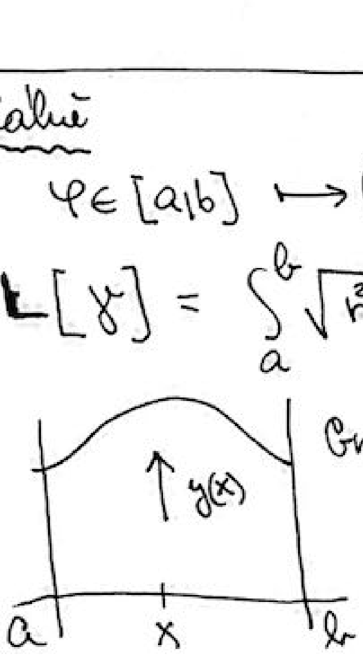
Speciálně

(i) $\varphi \in [a,b] \longmapsto (\overbrace{r(\varphi)\cos\varphi}^{x_1(\varphi)}, \overbrace{r(\varphi)\sin\varphi}^{x_2(\varphi)})$

$$\Rightarrow L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$



(ii)



Graf funkce

$x \in [a,b] \longmapsto [x, y(x)]$

$$L[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

Tři úlohy (variačního počtu)

(i) Nalézt $\min\limits_{y\in X^1} \mathcal{L}[y]$, kde $X^1 = \{\overbrace{y\in C^1((a,b))\cap C(\langle a,b\rangle)}^{Z};$
$y(a)=A,\ y(b)=B\}$

Úloha: nalézt nejkratší křivku spojující dva body $[a,A]$ a $[b,B]$

(ii) Nalézt $\min\limits_{y\in X^2} \mathcal{L}[y]$ $\quad X^2 = \{y\in Z;\ y(a)=A\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejmenší vzdálenost $[a,A]$ od přímky procházející body $[b,0]$ a $[b,B]$, $B\neq 0$.

(iii) Nalézt $\min\limits_{y\in X^3} \mathcal{L}[y]$ $\quad X^3 = \{y\in Z\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejkratší vzdálenost mezi dvěma přímkami danými body $[a,0],[a,A]$ resp. $[b,0],[b,B]$.

$V[y] := \pi\int_a^b y^2(x)\,dx$

$P[y] := 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

Funkcionály plochy, objemu rotačních těles; $\quad$ „$f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$"

(2) Klasická teoretická mechanika. Jedním z důležitých principů je HAMILTONŮV PRINCIP NEJMENŠÍ AKCE:

pohyb $\left(\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))\right)$ Newtonova potenciálního systému daného rovnicemi

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{x}}{dt}\right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0 \iff (m\dot{\vec{x}})^{\cdot} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \vec{0}$$

se shoduje s kritickými body (extremálami) funkcionálu

$$\Phi[\vec{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t,\vec{x},\frac{d\vec{x}}{dt}\right)dt, \text{ kde}$$

$$L(t,\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t)) \overset{df}{=} T(t,\vec{x},\dot{\vec{x}}) - U(\vec{x})$$

③ Problém minimální plochy $\quad u(x,y): \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$S[u] := \int_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dx\,dy$$

$$\min_{\substack{u\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})\\ u|_{\partial\Omega}=u_0}} S[u]$$

u_0 je daná funkce na hranici „bublifuk".

④

Úloha: nalézt maximální plochu, kterou lze „uzavřít" provázkem dané délky, tj.

$$\max \mathcal{S}[y] \quad y\in X \;\&\; \mathcal{L}[y]=l>0$$

$l>0$ dáno

$\boxed{\text{Úloha ①}}$ zapadají do obecnější úlohy: nalézt $y\in X$ tak, že y je extremála (kritický bod) funkcionálu

$$\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$$

$$L: (a,b)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Úloha ②}}$ jsou úlohy typu: nalézt $\vec{y}\in X^s$ (tzn. $y_i\in X$, $i=1,\dots,s$) tak, že $\vec{y}$ je extremála funkcionálu

$$\phi[\vec{y}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \vec{y}(t), \dot{\vec{y}}(t))\,dt$$

$$L: (t_1,t_2)\times\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Úloha ③}}$ patří mezi úlohy: nalézt $u\in X$ tak, že u je extremála

$$\Psi[u] = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\,dx$$

$$L: \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \quad \Omega\subset\mathbb{R}^d.$$

$\boxed{\text{Úloha ④}}$ je úloha typu ① s podmínkou, že jiný funkcionál $\Xi[y]=0$ (omezení). vazba

$\boxed{\text{Teorie}}$

Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ lineární (vektorový) ~~pro~~ prostor, který je normovaný a úplný $\equiv$ X je Banachův

⊩ · $\dim X$, kde X je prostor funkcí, je nekonečná.

· $C^\infty((a,b)) \subset C^2((a,b)) \subset C((a,b))$ a C^∞ obsahuje polynomy libovolného stupně $\{1, x, x^2, \dots, x^k \dots\}$ $\Rightarrow$ dimenze tohoto prostoru je ∞. ⫫

Def. Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 lokální $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$

$$\stackrel{df}{\equiv} \exists\, U_\delta(x_0) := \{x \in X;\ \|x - x_0\|_X < \delta\} \text{ tak, že } \phi(x_0) \left\{\begin{matrix}\geq\\ \leq\end{matrix}\right\} \phi(x) \quad \forall x \in U_\delta(x_0).$$

Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 ostré lokální $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$

$$\stackrel{df}{\equiv} \exists\, U_\delta(x_0) \text{ tak, že } \phi(x_0) \left\{\begin{matrix}>\\ <\end{matrix}\right\} \phi(x) \text{ pro všechna } x \in P_\delta(x_0)$$

$$P_\delta(x_0) := \{x \in X;\ 0 < \|x - x_0\|_X < \delta\}$$

Def. Řekneme, že $\phi: X \to \mathbb{R}$ má v x_0 derivaci Gateaux ve směru $h \in X$ (neboli ϕ je v x_0 Gateauxovsky diferencovatelná v $h \in X$) pokud existuje

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi[x_0 + th] - \phi[x_0]}{t}.$$

Tuto limitu značíme $\delta\phi[x_0](h)$.

⊩ Pozorujeme, že pro $g(t) := \phi(x_0 + th)$ lze $\delta\phi[x_0](h)$ zapsat ekvivalentně ve tvaru

$$\delta\phi[x_0](h) = \lim \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0}$$

Tedy derivování v X ∞-dimenze je redukováno na derivování funkce jedné reálné proměnné.

<u>Věta 1</u> (Nutná podmínka existence extremály)

Nechť $\Phi : X \to \mathbb{R}$ má v x_0 extremálu a nechť $\delta\Phi[x_0](h)$ existuje pro každé $h \in X$.

Pak
$$\boxed{\delta\Phi[x_0](h) = 0 \qquad \forall\, h \in X}$$

(Dk) Buď $h \in X$ libovolné, ale pevné. Zadefinujme fci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako výše, tedy

$$g(t) := \Phi(x_0 + th)$$

[Všimněme si, že $x_0 + th \in X$ díky linearity prostoru X]

Pak z předpokladů plyne, že
- g má v 0 extrém
- $g'(0)$ existuje.

Tedy dle věty z 1. roč. (nutná podmínka existence extrému fce reálné proměnné) je však $g'(0) = 0$, což však znamená, že

$$\delta\Phi[x_0](h) = 0.$$

Protože h bylo zvoleno libovolně, tvrzení je dokázáno. ▨

Uvažujme dále

$$\Phi[y] := \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$$

a řešme úlohu variačního počtu:

$$\boxed{\text{Nalézt } y_{min} \in X^i \text{ tak, že } \Phi[y_{min}] = \min_{y \in X^i} \Phi[y]}$$

$$i = 1, 2, 3$$

kde pro $Z = C^1((a,b)) \cap C(\langle a,b \rangle)$:

$$X^1 = \{ z \in Z;\ z(a) = A,\ z(b) = B \}$$
$$X^2 = \{ z \in Z;\ z(a) = A \}$$
$$X^3 = \{ z \in Z \} = Z.$$

Příklady

(a) Úlohy v Příkladu (1) o funkcionálu délky křivky, kde

$$L(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$$

(b) V Příkladu (1) také

$$L(\varphi, r, r') = \sqrt{r^2 + (r')^2}$$

(c) Úloha o brachystochroně

χρονος – čas
βραχιστος – nejkratší

Natáhnout drátek mezi dvěma body (např. [0,0] a [a,b], a,b > 0) tak, aby korálek navlečený na drátek v bodě [a,b] dorazil do počátku v nejkratším čase

Galileo Galilei (1637): otázka, zda lze najít natažení, po kterém se korálek dostane do počátku rychleji než po "přímce" spojující [0,0] a [a,b].

Johann Bernoulli (1.1.1697) předložil vědecké komunitě výzvu formou následujícího oznámení:

„Já, Johann Bernoulli, si dovoluji pozdravit nejchytřejší matematiky z celého světa. Nic nemůže být přitažlivější inteligentním lidem než čestný, vyzývavý a podnětný problém, jehož řešení přinese věhlas a slávu a zůstane navždy trvalým monumentálním dílem.

Následujíce příklady položené Pascalem, Fermatem a jinými, doufám, že získám ocenění celé vědecké komunity tím, že před ty nejlepší matematiky naší doby položím problém, který prověří jejich metody a sílu jejich intelektu. Pokud mi někdo předloží řešení navrženého problému, veřejně ho prohlásím za hodna výtečného ocenění a chvály."

Minimalizovat $T[y]$ přes $y \in C^1((0,a)) \cap C(\langle 0,a \rangle)$, $y(0)=0$, $y(a)=b$

kde

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{b-y(x)}}\, dx \qquad \text{(DÚ, cvičení)}$$

Tedy

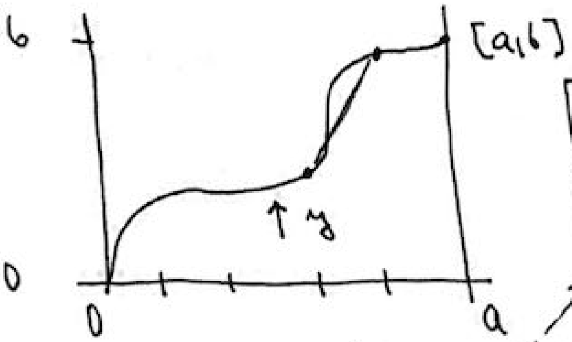
$$L(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(b-y)}}$$

Úloha o brachystochroně je podobná jiné úloze z optiky:
V dokonale průhledném prostředí s proměnným indexem lomu jsou dány dva body A a B.
Cíl: určit trajektorii světelného paprsku jdoucího z A do B.
Fermatův princip říká, že ze všech křivek spojujících A a B je trajektorie světelného paprsku ta, po které dospěje světlo z A do B v nejkratším čase.

Úloha o brachistochroně

χρονος ... čas
βραχιστος .... nejkratší

Cíl: Natáhnout drátek mezi počátkem $[0,0]$ a bodem $[a,b]$ tak, aby korálek navlečený v bodě $[a,b]$ na drátek se dostal do počátku v nejkratším čase.



Drátek popsán funkcí $y:[0,a]\to\mathbb{R}$
$y(0)=0$, $y(a)=b$.

čas, délka, rychlost přiřazené intervalu (t_{i-1},t_i).

$$T[y] \approx \sum_{i=1}^{N} t_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{s_i}{v_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{\left(y(x_i)-y(x_{i-1})\right)^2+\left(x_i-x_{i-1}\right)^2}}{v_i}$$

$$\overset{\text{LVOSH}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{1+\left(y'(\xi_i)\right)^2}}{v(\xi_i)}\,(x_i-x_{i-1})$$

Předpokládáme, že platí, že SOUČET KINETICKÉ A POTENCIÁLNÍ ENERGIE SE ZACHOVÁVÁ:

$$\frac{1}{2}m v^2(\xi_i) + m g y(\xi_i) = m g b$$

$$\Downarrow$$

$$v(\xi_i) = \sqrt{2g\left(b-y(\xi_i)\right)}$$

Tedy

$$T[y] \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{\sqrt{1+\left(y'(\xi_i)\right)^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{b-y(\xi_i)}}\,(x_i-x_{i-1}) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}}{\sqrt{b-y(x)}}\,dx$$

$$T[y] = \int_a^b L\left(y(x),y'(x)\right)dx$$