▶ **Metoda periodizace: počáteční a okrajová úloha pro vlnovou rovnici na úsečce**

Uvažujme nejdříve úlohu s "pevnými" konci, tzn. hledáme řešení úlohy

$$(*)\qquad \boxed{\begin{array}{lll} (EQ) & \Box u = f & \text{v } (0,+\infty)\times(0,\ell) \\ (PP) & u(0,\cdot) = u_0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1 & x\in(0,\ell) \\ (OP)_a & u(t,0) = u(t,\ell) = 0 & t>0 \end{array}}$$

V druhé části cvičení se podíváme i na další okrajové podmínky:

$$(OP)_b \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\ell) = 0 \qquad \text{volné konce}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (OP)_c & u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\ell) = 0 \\ (OP)_d & \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,\ell) = 0 \end{array}\right\} \text{ smíšené podmínky}$$

Tyto úlohy umíme v principu řešit Fourierovou metodou separace proměnných a nebo, v případě $\ell=\infty$, metodou odrazu.

Metoda periodizace, kterou si nyní odvodíme, převádí (podobně jako metoda odrazu) počáteční a okrajovou úlohu (*) na počáteční (Cauchyho) úlohu. Tato metoda má opodstatnění v rámci teorie distribucí a využívá Poissonův sumační vzorec, viz minulý semestr (závěr kapitoly 4):

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \quad \text{platí } \forall f\in\mathcal{S} \text{ nebo } \mathcal{D}}$$

nebo $\boxed{\delta_\Sigma = \hat{\delta}_\Sigma}$, kde $\delta_\Sigma := \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \delta_n$ $=: \delta_\Sigma^N$

je tzv. vzorkovací distribuce

(tzn., že g je buď u_0 nebo u_1 nebo f.)

Nechť $\boxed{\ell = \frac{1}{2}}$. Data $g\in\{u_0,u_1,f\}$ z úlohy (*) prodloužíme z $(0,\frac{1}{2})$ nejdříve lichě na $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ a označíme je $\tilde{g}_P$. Následně aplikujeme konvoluci $\tilde{g}_P$ se vzorkovací distribucí δ_Σ. Tak provedu periodizaci dat, a následně řešíme Cauchyho úlohu pro vlnovou rovnici v $\mathcal{D}'$, což umíme, viz cvičení 3.

dostanu fci/distribuci $\tilde{g}$

Malinko přesněji: $\tilde{g}_P$ generuje/představuje distribuci T s nosičem v $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Pak $T*\delta_n = T(x-n)$ je posunutí T na interval se středem v n a tedy

$$T*\delta_\Sigma = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T(x-n)$$

je periodizace T a tedy dat $\tilde{g}_P$.

Pro danou funkci/distribuci $\tilde{g}$ dle cvičení 3 potřebuji spočítat

$$\partial_t\left(u_F \overset{(x)}{*} \tilde{g}\right), \quad u_F \overset{(x)}{*} \tilde{g} \quad \text{a} \quad H(t)\,u_F \overset{(t,x)}{*} \tilde{g}$$

viz formule ($\check{R}W_{\text{cand}}$) a cvič. 3, kde $u_F := e^{\text{II}}$.

Počítejme tedy $\boxed{u_F*\tilde{g}}$. Máme

$$u_F*\tilde{g} = u_F*(\tilde{g}_P*\delta_\Sigma) = \lim_{N\to\infty} u_F*(\tilde{g}_P*\delta_\Sigma^N).$$

Limitu spočítáme pomocí F.T. (tam a zpět):

$$\mathcal{F}(u_F*\tilde{g}) = \mathcal{F}(u_F*\tilde{g}_P*\delta_\Sigma) = \mathcal{F}(u_F)\mathcal{F}(\tilde{g}_P)\mathcal{F}(\delta_\Sigma)$$

$$= \underbrace{\mathcal{F}(u_F)\mathcal{F}(\tilde{g}_P)\delta_\Sigma} = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=-N}^{N}\mathcal{F}(u_F)(n)\,\mathcal{F}(\tilde{g}_P)(n)\,\delta_n\right)$$

Aplikací $\mathcal{F}^{-1}$:

(•) $$\boxed{u_F*\tilde{g} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\mathcal{F}(u_F)(n)\,\mathcal{F}(\tilde{g}_P)(n)\,e^{2\pi i n x}}$$

neboť $\mathcal{F}^{-1}$ působí jen na δ_n, $\mathcal{F}(u_F)(n)\mathcal{F}(\tilde{g}_P)(n)$ jsou čísla

Pro naši úlohu s námi uvažovanou vlnovou rovnicí v 1D:

(••) $$\boxed{\mathcal{F}(u_F)(n) = \begin{cases} \sin\dfrac{2\pi k|n|t}{2\pi k|n|} & n\neq 0 \\ t & n=0\end{cases}}$$

a

(•••) $$\boxed{\mathcal{F}(\tilde{g}_P)(n) = \int_{-1/2}^{1/2}\tilde{g}_P(x)\,e^{-2\pi i n x}\,dx.}$$

ZDE VYUŽÍVÁME POZOROVÁNÍ

$h\delta = h(0)\delta$ neboť $\langle h\delta,\varphi\rangle = \langle\delta, h\varphi\rangle = h(0)\varphi(0) = \langle h(0)\delta_0,\varphi\rangle$

↑ fce

TEDY PRO $h = \mathcal{F}(u_F)\mathcal{F}(\tilde{g}_P)$ a δ_Σ vnímáno jako $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\delta_n$

DOSTÁVÁME POSLEDNÍ ROVNOST

Podrobnosti k výkladu (rigorózně důkaz vztahů (•) – (•••)) lze nalézt v Černý, Pokorný IV, Lemma 25.2.22 (o řadách Four. transformací).

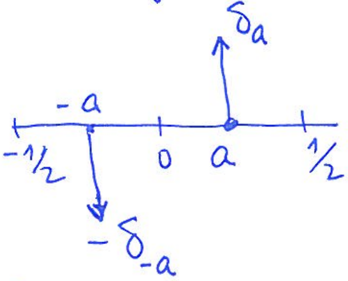
$\boxed{\text{Příklad}}$ Metodou periodizace vyřešme úlohu

(EQ) $\quad \Box u = 0 \quad$ v $(0,+\infty)\times(0,\tfrac{1}{2})$

(PP) $\quad u(0,\cdot) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = \delta_a$ v $(0,\tfrac{1}{2})$, kde $a \in (0,\tfrac{1}{2})$

(OP)
$$\left.\begin{aligned}
&a)\ u(t,0) = u(t,\tfrac{1}{2}) = 0\\
&b)\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\tfrac{1}{2}) = 0\\
&c)\ u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\tfrac{1}{2}) = 0\\
&d)\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,\tfrac{1}{2}) = 0
\end{aligned}\right\}\quad t>0$$

Řešení $\boxed{\text{Ad a)}}$ Dirichletovy podmínky ⇒ prodloužím liše (data, kde $u_1 = \delta_a$) na $(-\tfrac{1}{2},0)$ a provedu periodizaci:



z $u_1 = \delta_a$ přiradím $(\tilde{u}_1)_p = \delta_a - \delta_{-a}$ a

z má $\tilde{u}_1 = (\delta_a - \delta_{-a}) * \delta_\Sigma$, $\tilde{u}_0 = \tilde{f} = 0$.

Řešení $\quad \tilde{u} = \cancel{u}_F * \left((\delta_a - \delta_{-a}) * \delta_\Sigma\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x} \begin{cases} \dfrac{\sin 2\pi k|n|t}{2\pi k|n|} & (n\neq 0)\\ t & (n=0)\end{cases}$

kde $c_n = \langle \delta_a - \delta_{-a}, e^{-2\pi i n x}\rangle = e^{-2\pi i n a} - e^{2\pi i n a}$
$= -2i \sin(2\pi n a)$

Odtud

$$\underline{\underline{\tilde{u}(t,x)}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dfrac{\sin 2\pi k|n|t}{2\pi k|n|} & (n\neq 0)\\ t & n=0 \end{Bmatrix}}_{\text{sudé v } n} \underbrace{(-2i)\sin 2\pi n a}_{\text{liché v } n} \left(\underbrace{\cos 2\pi n x}_{\text{sudé}} + i \underbrace{\sin 2\pi n x}_{\text{liché}}\right)$$

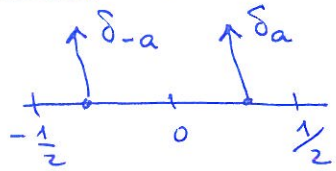
liché v n, sudé v n → 0

$$= 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi k|n|t}{2\pi k|n|} \sin 2\pi n a \ \sin 2\pi n x$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k n t}{2\pi k n} \sin 2\pi n a \ \sin 2\pi n x$$

Hledané řešení $u(t,x)$ je $\tilde{u}(t,x)\Big|_{(0,\frac{1}{2})}$ resp. $\tilde{u}(t,x)\Big|_{[0,\frac{1}{2}]}$.

$\boxed{\text{Ad b)}}$ Nyní prodloužíme sudě a provedeme periodizaci.



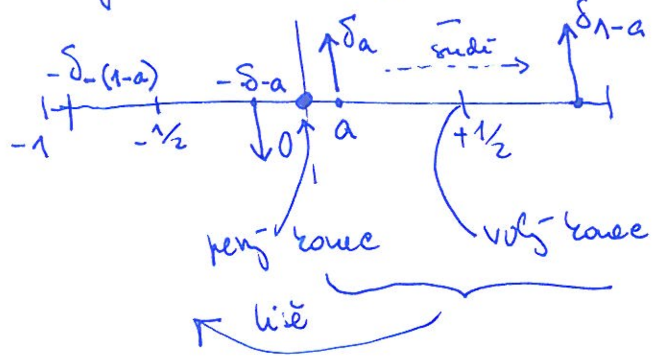
$\Rightarrow$ stejným postupem jako v a) vyjde c_n, pro které platí: $c_n = \langle \delta_a + \delta_{-a}, e^{-2\pi i n x} \rangle$
$= 2\cos 2\pi n a$

Tedy

$$\tilde{u}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{cases} \dfrac{\sin 2\pi k|n|t}{2\pi k|n|} & (n\neq 0) \\ t & n=0 \end{cases} \; 2\cos 2\pi n a\,(\cos 2\pi n x + i\sin 2\pi n x)$$

$$= 2\left(t + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k n t}{2\pi k n} \cos 2\pi n a \cos 2\pi n x\right)$$

$\boxed{\text{Ad c)}}$ nejdříve pravý konec prodloužím sudě na $(\frac12, 1)$ a pak data z $(0,1)$ prodloužím liše na $(-1,1)$ a periodizuji.
Nyní však máme periodu délky 2.



Modifikací postupu, který vedl k odvození $(\bullet)$–$(\bullet\bullet\bullet)$, viz str. Cv 4/2, pro periodu obecné délky L dostaneme

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{1}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(u_F)\left(\frac{n}{L}\right) \mathcal{F}(\tilde{g})\left(\frac{n}{L}\right) e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \tilde{g}\, e^{-\frac{2\pi i n x}{L}}\,dx = \left\langle \frac{1}{L}\tilde{g}, e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} \right\rangle$$

V našem případě $\boxed{L=2}$ a

$$c_n = \frac12 \left\langle \delta_a + \delta_{1-a} - \delta_{-a} - \delta_{-(1-a)}, e^{-\frac{2\pi i n x}{2}} \right\rangle = \frac12\left(e^{-i\pi n a} - e^{i\pi n a} + e^{-i\pi n(1-a)} - e^{i\pi n(1-a)}\right)$$

$$= -i\sin \pi n a + (-1)^n i \sin \pi n a = \begin{cases} 0 & n \text{ sudé} \\ -2i\sin\pi n a & n \text{ liché} \end{cases}$$

Tedy

$$\underline{\tilde{u}(t,x)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{cases} \sin \dfrac{2\pi k|n|t}{2} \\ t \end{cases} \cdot \left\{ \quad \right\} \cdot e^{\frac{2\pi i n x}{2}}$$

$$= 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin \pi k(2j+1)t}{\pi k(2j+1)} \sin \pi(2j+1)a \, \sin\pi(2j+1)x$$

Uvedme si, jak postupovat pokud v předchozích úlohách a) – d) budou data NEHOMOGENNÍ, tj. okrajové podmínky budou mít tvar

a) $u(t,0) = A$, $u(t,\frac{1}{2}) = B$

b) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = A$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t,\frac{1}{2}) = B$

c) $u(t,0) = A$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t,\frac{1}{2}) = B$

d) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = A$, $u(t,\frac{1}{2}) = B$.

Řešení využívá linearity diferenciálního operátoru. Řešení hledáme ve tvaru $u = u^1 + u^2$,

kde u^1 je co nejjednodušší hladká funkce splňující výše uvedené nehomogenní (okrajové) podmínky a u^2 je pak možno jako řešení (modifikovaného) problému s homogenními okrajovými podmínkami. Konkrétně:

Ad a) u^1 hledáme ve tvaru $u^1(x) = \alpha x + \beta$. Z podmínek a) plyne: $\beta = A$ $\quad \frac{\alpha}{2} + \beta = B \Rightarrow$ $\underline{u^1(x) = 2(B-A)x + A}$

Pro u^2 máme $\boxed{u^2 = u - u^1}$

$$\boxed{\begin{aligned} \Box u^2 &= \Box u - \Box u^1 = 0 \\ &\quad \uparrow = 0 \text{ (ze zadání)} \qquad = 0 \text{ neb} \\ u^2(0,\cdot) &= u(0,\cdot) - u^1(x) = -u^1(x) \\ \frac{\partial u^2}{\partial t}(0,\cdot) &= \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) - \frac{\partial u^1}{\partial t}(x) = \delta_a \quad \uparrow \text{ ze zadání} \\ u^2(t,0) &= u^2(t,\tfrac{1}{2}) = 0 \end{aligned}}$$

Úlohu pro u^2 již můžeme řešit jako výše s rozdílem, že jsou nyní obě počáteční podmínky nenulové.

Ad b) u^1 hledáme (nyní) ve tvaru $u^1(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (lineární fce nemusí stačit pro $A \neq B$)

resp. $\underline{u^1(x) = \alpha x^2 + \beta x}$

α, β určíme z podmínek b): $\beta = A$; $\alpha = B - A$

Pro u^2 máme:

$$\boxed{\begin{aligned} \Box u^2 &= \Box u - \Box u^1 = 0 + 2k^2\alpha = 2k^2(B-A) =: f \\ u^2(0,\cdot) &= -u^1(x) \\ \frac{\partial u^2}{\partial t}(0,\cdot) &= \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1(a) = \delta_a \\ \frac{\partial u^2}{\partial x}(t,0) &= \frac{\partial u^2}{\partial x}(t,\tfrac{1}{2}) = 0 \end{aligned}}$$

Ad c) a d) u^1 najdu ve tvaru $u^1(x) = \alpha x + \beta$ a postupuji jako v a).