KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

Úvod & Motivace

Křivkový a plošný integrál nejsou nové typy integrálů jako byly Riemannův, Newtonův či Lebesgueův integrál. Nepůjde nám o konstrukci, ale o pochopení jak využít Lebesgueův integrál k výpočtu integrálu na křivkách, plochách či jejich zobecněních: k-plochách v d-rozměrném prostoru, $d \in \mathbb{N}$ a $1 \le k \le d$. (Je-li $k = d$, pak se jedná o (pro nás již známý) Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^d$.)

Je-li $\boxed{k=1}$ mluvíme o křivkovém integrálu, neboť 1-rozměrné objekty v $\mathbb{R}^d$ jsou křivky (trajektorie).

Křivkou φ rozumíme zobrazení z intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^d$. Budeme uvažovat křivky, které zobrazují (a,b) na svůj obraz značený $\langle \varphi \rangle$ prostě a které jsou třídy C^1. Tzn.

$$\varphi : (a,b) \xrightarrow{\text{na}} \langle \varphi \rangle \subset \mathbb{R}^d \quad \text{a} \quad \varphi'(t) \text{ existuje } \forall\, t \in (a,b)$$

$$\text{a} \quad \varphi' \in C((a,b)) \Rightarrow \boxed{\varphi \in C^1((a,b))}$$

$$\text{a} \quad \varphi'(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in (a,b).$$

(viz příklad na str. 3)

Rozlišujeme 2 významné třídy křivkových integrálů:

[1] **KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 1. DRUHU** značíme $\int_{\langle\varphi\rangle} f \, ds$ kde f skalár

Význam: $f \equiv 1 \Rightarrow$ délka křivky

$f = \varrho$ hustota $\Rightarrow$ hmotnost "drátku" popsaného křivkou $\langle\varphi\rangle$ s hustotou ϱ.

---

[2] **KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 2. DRUHU** značíme $\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{t} \, ds$ kde $\vec{f}$ vektorová funkce

$\vec{ds} = \vec{t} \, ds$

tečný vektor podél $\langle\varphi\rangle$

Význam: práce potřebná k překonání síly $\vec{f}$ působící proti pohybu) podél $\langle\varphi\rangle$

(hmotný bod pohybující se

Otázka Jak křivkové — integrály počítat?

Odpověď: Motivování vzorečku (odvození vzorečku) pro délku křivky:

$\boxed{\text{1. DRUHU}}$ $$\int_{\langle\varphi\rangle} 1\, ds \underset{\substack{\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}^d \\ \varphi(t)=(\varphi_1(t),\dots,\varphi_d(t))}}{=} \int_a^b \sqrt{[\varphi_1'(t)]^2+\dots+[\varphi_d'(t)]^2}\,dt = \int_a^b |\vec{\varphi}'(t)|_2\,dt$$

kde poslední integrál je JEDNOROZMĚRNÝ (Lebesgueův či Riemannův) integrál na (a,b),

zavedeme,

pro skalární f definovanou na otevřené množině obsahující $\langle\varphi\rangle$ vztah

$$\int_{\langle\varphi\rangle} f\,ds \left(= \int_{\langle\varphi\rangle} f(\overset{x_1,\dots,x_d}{\vec{s}})\,ds\right) \overset{df}{=} \int_a^b f(\vec{\varphi}(t))\,\|\vec{\varphi}'(t)\|_2\,dt$$

tečný vektor ke $\langle\vec\varphi\rangle$ v $\vec{\varphi}(t)$

$\boxed{\text{2. DRUHU}}$ Je-li $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}^d$, pak $\vec{t} = \dfrac{\vec{\varphi}'(t)}{\|\vec\varphi'(t)\|_2}$ a tak

$$\boxed{\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{ds}} = \int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{t}\,ds = \int_a^b \vec{f}(\vec{\varphi}(t))\cdot\frac{\vec{\varphi}'(t)}{\|\vec{\varphi}'(t)\|_2}\,|\vec{\varphi}'(t)|_2\,dt$$

$$= \boxed{\int_a^b \vec{f}(\vec{\varphi}(t))\cdot\vec{\varphi}'(t)\,dt}$$

Všimněme si, že ⓐ z pohledu d-rozměrného (Lebesgueova) integrálu integrujeme, pro $d\geq 2$, přes křivky, které mají d-rozměrnou Lebesgueovu míru rovnou 0.

ⓑ Stejnou křivku mohu popsat různými parametrizacemi

např. • $\varphi(t)=(\cos t,\sin t)$ pro $t\in(-\pi,\pi)$ nebo $t\in(0,4\pi)$

$\Rightarrow \varphi'(t) = (-\sin t,\cos t)\neq 0 \quad (\forall t\in\mathbb{R})$

• $\varphi(t)=(\cos t^2,\sin t^2)$ $\quad t\in(-\pi,\pi)$

$\Rightarrow \varphi'(t) = (-2t\sin t^2, 2t\cos t^2)\neq 0 \Leftrightarrow t\neq 0.$

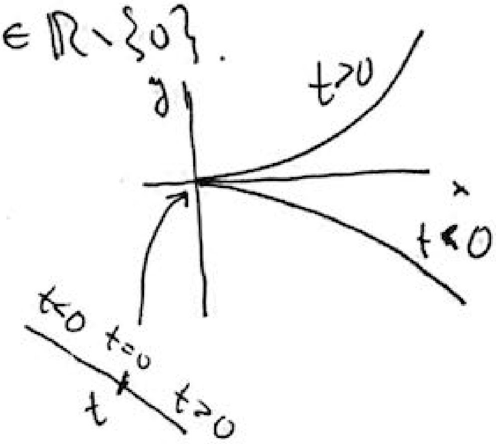
Vždy popisuje φ kružnici $\partial B_1(0)\subset\mathbb{R}^2$, v prvním případě $\vec{\varphi}'(t)\neq 0$ vždy ale φ není prosté pro intervaly větší než $(0,2\pi)$.

V druhém případě se v $t=0$ mění směr pohybu a pohybuji se po křivce nazpátek.

Proto $\vec{\varphi}(t) = (t^2, t^3)$ nepopisuje hladkou křivku. Všimni:

- $\vec{\varphi}'(t) = (2t, 3t^2) = (0,0) \Rightarrow \vec{\varphi}'(t) \neq 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $x = t^2, y = t^3$ a $t > 0$ $\quad y = x^{3/2}$

  $x = t^2, y = t^3$ a $t < 0$ $\quad y = -x^{3/2}$



Q: • Není jasné, zda takto definované integrály nezávisí na parametrizaci – to by byl nežádoucí efekt.

• Je třeba ověřovat podmínku $\vec{\varphi}'(t) \neq 0$ a požadovat, aby φ bylo na (a,b) prosté (jinak musíme počítat vícenásobná oběhnutí).

▷ Je-li $\boxed{k=2}$ mluvíme o plošném integrálu, neboť 2-rozměrné objekty v $\mathbb{R}^d$ (speciálně v $\mathbb{R}^3$, tzn. $d=3$) jsou plochy.

Motivováni popisem kulové a válcové plochy (sférické a cylindrické souřadnice) a dosud. ohledně křivek definujeme

Jednoduchou plochu φ jako prosté zobrazení intervalu $\overbrace{(a,b)\times(\alpha,\beta)}^{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ na obraz $\varphi(\Omega)$ takové, že $D\varphi$ existuje $\forall (u,v) \in \Omega$

a $$D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$ má v Ω hodnost 2

Př. $$\begin{cases} \varphi_1 : (\rho, \alpha) \mapsto (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha, \sqrt{1-\rho^2}) & \text{kde } \rho \in (0,1),\ \alpha \in (0,2\pi) \\ \varphi_2 : (\psi, \varphi) \mapsto (\cos\psi\sin\varphi, \sin\psi\sin\varphi, \cos\psi) & \text{kde } \psi \in (0,2\pi),\ \varphi \in (0,\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

popisují severní polosféru.

Máme tedy 2 různé parametrizace (φ_1 resp. φ_2) stejné jednoduché plochy v $\mathbb{R}^3$.

Opět rozlišujeme dva druhy plošných integrálů:

$\boxed{\text{[1] PLOŠNÝ INTEGRÁL 1. DRUHU}}$ značíme $\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} f \, dS$ kde f je skalár

význam: $f = 1$ • obsah plochy $\langle\varphi(\Omega)\rangle$

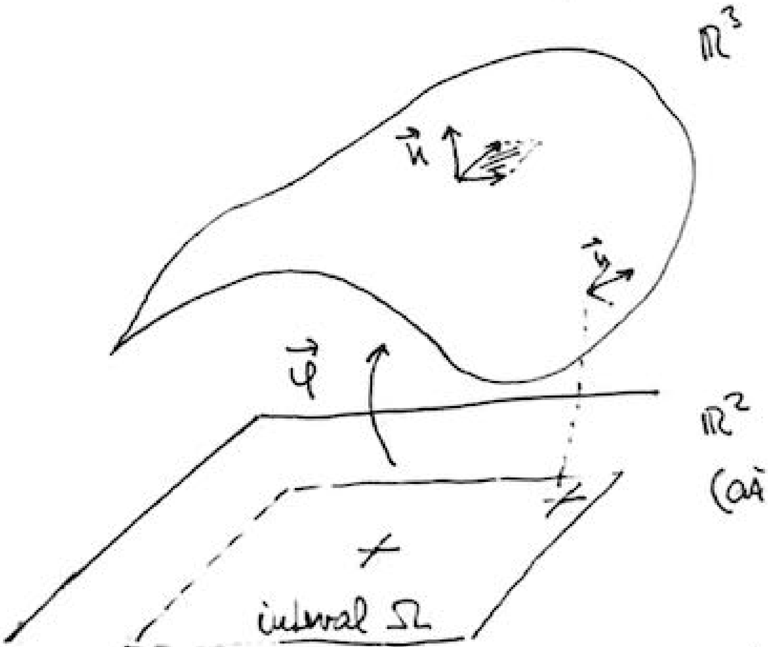
$f = \rho$ • hmotnost plochy

$\boxed{\text{[2] PLOŠNÝ INTEGRÁL 2. DRUHU}}$ značíme $\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec{f} \cdot \vec{dS}$ kde $\vec{f}$ je vektorová fce z $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec{f} \cdot \vec{dS} = \int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS$$

význam: tok veličiny $\vec{f}$ (např. tepla, je-li $\vec{f}$ kpely tok) přes plochu $\langle\varphi(\Omega)\rangle$

Otázka: Jak plošné integrály počítat?



tečná nadrovina je určena v daném bodě vektory

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\right)$$

a

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right)$$

Normálový vektor $\vec{n}$ je pak dán (až na násobek) jako vektorový součin

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}$$

tedy: $\vec{n} = \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}\right) \Big/ \left|\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}\right|$

"Motivace":

$$\int_{\varphi(\Omega)} dS = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla z|^2} = \int_{\Omega} \quad du\,dv \qquad \text{OBSAH PLOCHY}$$

Parametrizace v případě, kdy plocha je dána jako graf fce

$\vec{\varphi}: \underset{\mathbb{R}^2}{(u,v)} \mapsto \underset{\mathbb{R}^3}{(u, v, z(u,v))} \Rightarrow \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(-\frac{\partial z}{\partial u}, -\frac{\partial z}{\partial v}, 1\right)$

Tedy

1. DRUHU
$$\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} f\,dS \overset{df}{=} \int_{\Omega} f(\vec{\varphi}(u,v))\, \left\| \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right\|_2 du\,dv$$

2. DRUHU
$$\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec{f}\cdot\vec{dS} = \int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec{f}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{\Omega} \vec{f}(\vec{\varphi}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right) du\,dv$$

OTÁZKA: Jak bychom počítali 3-plochy v $\mathbb{R}^4$?

▷ Existují, a to i v dimenzi 3, některé věty a vzorečky, které spojují objemové, plošné a křivkové integrály:

- Věta o potenciálu,
- Greenova věta,
- Gaussova nebo Gauss-Ostrogradského věta,
- Stokesova věta,

které jsou zobecněními 1-rozměrného Newtonova vzorečku

$$(\square)\qquad \boxed{\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)}$$

Věta o potenciálu souvisí s křivkovým integrálem 2. druhu a je úzce spojená s $(\square)$ a s existencí potenciálu U k vektorovému poli $\vec{f}$. Za této situace:

$$\begin{aligned}\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{ds} &= \int_a^b \nabla U(\vec{\varphi}(t))\cdot\vec{\varphi}'(t)\,dt\\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}U(\vec{\varphi}(t))\,dt\\ &= U(\vec{\varphi}(b)) - U(\vec{\varphi}(a)).\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Greenova věta}}$ se týká $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a její hranice $\partial\Omega$, která tvoří jednoduchou uzavřenou křivku v $\mathbb{R}^2$.

$$\left[\text{tj. } \begin{array}{l} \varphi:(a,b)\to\mathbb{R}^2, \quad \varphi(a)=\varphi(b) \\ \varphi'(t)\neq 0 \ \forall t\in(a,b) \end{array}\right]$$

Pak
$$\int_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{dS} = \int_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)}_{\text{curl}\,\vec{f}} dx\,dy$$

integrál 2. druhu

curl $\vec{f}$ ve dvou dimenzích je skalár

$\boxed{\text{Stokesova věta}}$ se týká plochy $G \subset \mathbb{R}^3$ a její hranice ∂G, která vytváří uzavřenou křivku v $\mathbb{R}^3$

Platí:
$$\boxed{\int_{\partial G} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_G \underbrace{\text{curl}\,\vec{F}}_{\text{vektor}}\cdot\vec{dS}}$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$\int_{\partial G} \vec{F}\cdot\vec{t}\,ds \qquad \int_G \text{curl}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

$\boxed{\text{Gaussova věta}}$ se týká $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ a její hranice $\partial\Omega$, která představuje plochu v $\mathbb{R}^3$. Typický příklad je $\Omega = B_1(0)\subset\mathbb{R}^3$ a $\partial\Omega = \partial B_1(0)$.

Platí:
$$\int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{dS} = \int_\Omega \text{div}\,\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

neboli
$$\boxed{\int_\Omega \text{div}\,\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS}$$

Otázka: Dají se všechny tyto věty / formulky nahlédnout jako důsledek jediného vzorce? Ano.
$$\int_{\partial\Omega} F = \int_\Omega dF$$
v jazyce diferenciálních forem.