Jméno: ______________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Bodů	10	8	12	30
Získáno				

[10] 1. Uvažujte posloupnost distribucí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definovanou jako

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \delta\left(x - \frac{m}{n}\right),$$

kde $\delta\left(x - \frac{m}{n}\right)$ značí Diracovu distribuci v bodě $\frac{m}{n}$. Najděte limitu $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ této posloupnosti, aneb spočtěte

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \delta\left(x - \frac{m}{n}\right),$$

přičemž limitou se myslí limita posloupnosti ve smyslu distribucí. Přesně specifikujte v jaké smyslu je konvergence definována.

Řešení:

Chceme ukázat, že pro každou testovací funkci φ platí

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \to \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

kde konvergence je nyní standardní kovergence posloupnosti reálných čísel $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$. Diracova distribuce $\delta\left(x - \frac{m}{n}\right)$ aneb $T_{\delta\left(x-\frac{m}{n}\right)}$ je definována jako

$$\left\langle T_{\delta\left(x-\frac{m}{n}\right)}, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} =_{\text{def}} \varphi\left(\frac{m}{n}\right)$$

Dualita $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$ je tedy

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \left\langle \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} T_{\delta\left(x-\frac{m}{n}\right)}, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{m}{n}\right).$$

Velmi nám prospěje pokud si nakreslíme obrázek. Z obrázku je zřejmé, že výraz $\sum_{m=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{m}{n}\right)\frac{1}{n}$ je aproximací plochy pod křivkou $\varphi(x)$ na intervalu $[0,1]$. Očekáváme tedy, že by mělo platit

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \int_{x=0}^{1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Toto tvrzení můžeme formálně dokázat takto. Především platí, že

$$\sum_{m=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{m}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{m=0}^{n-1}\varphi(x_m)\,(x_{m+1}-x_m),$$

kde $x_m = \frac{m}{n}$ je dělení intervalu $[0,1]$. Výraz $\sum_{m=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{m}{n}\right)\frac{1}{n}$ je tedy totožný s Riemannovým součtem s normou dělení $\frac{1}{n}$ pro integrál $\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Integrál $\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ existuje neboť φ je testovací funkce (hladká funkce s kompaktním nosičem) a jakákoliv posloupnost Riemannových součtů s normou dělení jdoucí k nule tedy musí konvergovat k tomuto integrálu. Zatím jsme tedy dokázali, že platí

$$\lim_{n\to+\infty}\left\langle \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} T_{\delta\left(x-\frac{m}{n}\right)}, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{x=0}^{1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

pravou stranu ovšem můžeme přepsat jako

$$\int_{x=0}^{1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\chi_{[0,1]}\,\mathrm{d}x = \left\langle T_{\chi_{[0,1]}}, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

kde $\chi_{[0,1]}$ je charakteristická funkce intervalu $[0,1]$ tedy

$$\chi_{[0,1]} = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

která je lokálně integrovatelnou funkcí, a $T_{\chi_{[0,1]}}$ značí odpovídající distribuci. Celkem proto pro každou testovací funkci platí

$$\lim_{n \to +\infty} \left\langle \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} T_{\delta\left(x - \frac{m}{n}\right)}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \left\langle T_{\chi_{[0,1]}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

což znamená, že

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} T_{\delta\left(x - \frac{m}{n}\right)} = T_{\chi_{[0,1]}}.$$

Ke stejnému výsledku můžeme samozřejmě dospět i jinak. V rychlosti načrtneme postup založený na Fourierově transformaci. Použitím Fourierovy transformace zjistíme, že

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} T_{\delta\left(x - \frac{m}{n}\right)}\right] = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m}{n}\xi}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Přičemž jsme použili definici Fourierovy transformace

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{\xi}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme, a známý vztah pro Fourierovu transformaci Diracovy distribuce, $\mathcal{F}[\delta(x-0)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Řadu snadno sečteme s použitím vzorce pro součet geometrické řady

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m}{n}\xi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\xi}{n}}\right)^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{n} \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\xi}{n}}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{i}\frac{\xi}{n}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\xi}{n}} - 1} \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}}{\mathrm{i}\xi}.$$

Limitním přechodem tedy dostaneme

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{F}\left[\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} T_{\delta\left(x - \frac{m}{n}\right)}\right] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}}{\mathrm{i}\xi}.$$

Spočteme-li si inverzní Fourierovu transformaci výrazu na pravé straně, zjistíme, že předchozí rovnost lze zapsat jako

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{F}\left[\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} T_{\delta\left(x - \frac{m}{n}\right)}\right] = \mathcal{F}\left[\chi_{[0,1]}\right],$$

odkud plyne

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} T_{\delta\left(x - \frac{m}{n}\right)} = T_{\chi_{[0,1]}}.$$

[8] 2. S použitím Laplaceovy transformace najděte řešení g obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + 6g = 0$$

na intervalu $(1, +\infty)$ s počátečními podmínkami

$$g|_{x=1} = 2,$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = 2.$$

(Podívejte se pozorně na jakém intervalu chceme najít řešení a v jakém bodě předepisujeme počáteční podmínky.)

Řešení:

Nejprve si uvědomíme, že namísto funkce g můžeme rovnici řešit pro funkci f, která je definovaná jako

$$f(x) =_{\mathrm{def}} g(x+1),$$

aneb

$$g(x) = f(x-1).$$

Pro funkci f je nutné vyřešit rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + 6f = 0$$

na intervalu $(0, +\infty)$ s počátečními podmínkami

$$f|_{x=0} = 2,$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 2,$$

což je standardní úloha řešitelná Laplaceovou transformací. S použitím známých vztahů pro Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}[f] =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x$ derivace funkce

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = p\mathcal{L}[f] - f(0),$$
$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right] = p^2\mathcal{L}[f] - pf(0) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0),$$

převedeme rovnici do tvaru

$$p^2\mathcal{L}[f] - 2p - 2 - 5p\mathcal{L}[f] + 10 + 6\mathcal{L}[f] = 0,$$

odkud

$$\mathcal{L}[f] = \frac{2p-8}{p^2-5p+6}.$$

Zbývá spočíst inverzní Laplaceovu transformaci. Výraz na pravé straně rozložíme na parciální zlomky, jest $p^2-5p+6 = (p-3)(p-2)$ a standardní algebraické manipulace nás vedou k závěru, že

$$\frac{2p-8}{p^2-5p+6} = -\frac{2}{p-3} + \frac{4}{p-2}.$$

Víme, že platí

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{ax}] = \frac{1}{p-a},$$

což znamená, že

$$\mathcal{L}[f] = -2\mathcal{L}[\mathrm{e}^{3x}] + 4\mathcal{L}[\mathrm{e}^{2x}],$$

odkud

$$f(x) = -2\mathrm{e}^{3x} + 4\mathrm{e}^{2x}.$$

Řešení původně zadané rovnice je tedy

$$g(x) = -2\mathrm{e}^{3(x-1)} + 4\mathrm{e}^{2(x-1)}.$$

[12] 3. S pomocí Fourierovy transformace spočtěte

$$\mathrm{e}^{-|x|} \star \mathrm{e}^{-|x|},$$

kde hvězdička značí operátor konvoluce, který je definován jako

$$[g \star h](x) =_{\mathrm{def}} \int_{y \in \mathbb{R}} g(x-y)h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Řešení:

Dle návodu využijeme Fourierovy transformace. Víme, že platí

$$\mathcal{F}[g]\,\mathcal{F}[h] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[g \star h],$$

přičemž Fourierova transforamce je definována jako

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme. Nejdříve spočteme Fourierovu transformaci $\mathrm{e}^{-|x|}$. Výsledkem je

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|x|}\right](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2},$$

což ukážeme takto

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|x|}\right](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\xi-1)x}}{\mathrm{i}\xi - 1} \right]_{x=0}^{\infty} + \left[\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\xi+1)x}}{\mathrm{i}\xi + 1} \right]_{x=-\infty}^{0} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{\mathrm{i}\xi - 1} + \frac{1}{\mathrm{i}\xi + 1} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}.
\end{aligned}$$

Použijeme-li tedy vztah pro Fourierovu transformaci konvoluce, vidíme, že

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|x|} \star \mathrm{e}^{-|x|}\right] = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1+\xi^2)^2}.$$

Nyní se pokusíme přepsat pravou stranu jako Fourierovy transformaci nějaké funkce. Hledáme tedy

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(1+\xi^2)^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{(1+\xi^2)^2}\,\mathrm{d}\xi,$$

což je rutinní úloha, kterou vyřešíme metodami komplexní analýzy. Nejprve si uvědomíme, že funkce $\frac{1}{(1+\xi^2)^2}$ je sudá funkce, a její Fourierova transformace proto musí být sudá funkce. To nám umožní zjednodušit si výpočet tím, že ho provedeme pouze pro $x < 0$ nebo pro $x > 0$. Zabývejme se případem $x < 0$. Budeme zkoumat integrál z komplexní funkce

$$g(z) =_{\mathrm{def}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{(1+z^2)^2},$$

podél křivky $\boldsymbol{\gamma}_R$, kterou je kruhový oblouk o poloměru R v horní komplexní polorovině, viz Obrázek TODO. Parametrizace obloku je $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in (0, \pi)$, parametrizace úsečky na reálné ose je $z = \xi$, $\xi \in (-R, R)$. Pro danou parametrizaci tedy platí

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\xi=-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{(1+\xi^2)^2}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}}{(1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi})^2} \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Jelikož je $\varphi \in (0, 2\pi)$ a $x < 0$ vidíme, že výraz

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\cos\varphi} \mathrm{e}^{xR\sin\varphi}$$

zůstává pro $R \to +\infty$ omezený, a proto s použitím Jordanova lemmatu snadno ukážeme, že

$$\int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}}{(1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi})^2} \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \overset{R \to +\infty}{\to} 0$$

a proto

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\left(1+\xi^2\right)^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Podle reziduové věty ovšem také platí

$$\int_{\gamma_R} g(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{z_s\in\mathrm{int}\gamma_R}\, g(z).$$

Funkce $g(z)$ má zjevně singularity v bodech $z_s = \pm\mathrm{i}$ a tyto singularity jsou dvojnásobnými póly. Je proto

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} g(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{z_s=\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{\left(1+z^2\right)^2},$$

což v kombinaci s předchozím vztahem pro křivkový integrál znamená, že

$$\int_{\xi=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\left(1+\xi^2\right)^2}\,\mathrm{d}\xi = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{z_s=\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{\left(1+z^2\right)^2}.$$

Zbývá spočíst reziduum v bodě $z_s = \mathrm{i}$, což provedeme podle standardního lemmatu o výpočtu rezidua v dvojnásobném pólu,

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{z_s=\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{\left(1+z^2\right)^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-\mathrm{i})^2\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{\left(1+z^2\right)^2}\right]\Bigg|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{\left(z+\mathrm{i}\right)^2}\right]\Bigg|_{z=\mathrm{i}} \\ &= \frac{-\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}\left(z+\mathrm{i}\right)^2 - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}\left(z+\mathrm{i}\right)}{\left(z+\mathrm{i}\right)^4}\Bigg|_{z=\mathrm{i}} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^x}{4}\left(x-1\right).\end{aligned}$$

Po dosazení do reziduové věty tedy dostaneme

$$\int_{\xi=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\left(1+\xi^2\right)^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^x\left(1-x\right)$$

a následně tedy pro $x<0$ dostaneme

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{\left(1+\xi^2\right)^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^x\left(1-x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-|x|}\left(1+|x|\right),$$

ze symetrie (Fourierova transformace sudé funkce je sudá funkce) ovšem plyne, že tento vztah platí i pro $x>0$, aneb

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-|x|}\left(1+|x|\right).$$

Vrátíme-li se zpět k rovnici

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|x|}\star\mathrm{e}^{-|x|}\right] = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^2},$$

vidíme, že ji můžeme přepsat jako

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|x|}\star\mathrm{e}^{-|x|}\right] = \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|x|}\left(1+|x|\right)\right]$$

odkud plyne, že

$$\mathrm{e}^{-|x|}\star\mathrm{e}^{-|x|} = \left(1+|x|\right)\mathrm{e}^{-|x|}.$$