Def. (derivace funkce f vyššího řádu). Buď $f : (x-\delta, x+\delta) \to \mathbb{C}$. Nechť $f'(z)$ existuje $\forall z \in (x-\delta, x+\delta)$. Řekneme, že f má v x derivaci 2. řádu, píšeme $\boxed{f''(x)}$, pokud existuje

$$\lim_{z \to x} \frac{f'(z) - f'(x)}{z - x}. \quad \text{Tzn. } f''(x) = (f')'(x).$$

Pro $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, definujeme analogicky $\boxed{f^{(k)}(x) \stackrel{df.}{=} \left(f^{(k-1)}\right)'(x)}$

Příklady Spočtěte první, druhou, třetí a čtvrtou derivaci těchto fcí:
(1) $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in (0, \infty))$; (2) $g(x) = x^2+1$; (3) $h(x) = \sqrt{x}\,(x^2+1)$.

Řešení

$\boxed{\text{Ad (1)}}$ $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$

$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} x^{-\frac{7}{2}}$.

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ $g(x) = x^2+1$, $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$, $g'''(x) = g^{(4)}(x) = 0$.

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ Protože $h(x) = f(x) g(x)$ lze, vedle přímého derivování, postupovat takto:

$$h'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$
$$h''(x) = f''(x) g(x) + \underbrace{f'(x) g'(x) + f'(x) g'(x)} + f(x) g''(x)$$
$$= f''(x) g(x) + 2 f'(x) g'(x) + f(x) g''(x)$$
$$h'''(x) = f'''(x) g(x) + 3 f''(x) g'(x) + 3 f'(x) g''(x) + f(x) g'''(x)$$
$$h^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) g(x) + 4 f'''(x) g'(x) + 6 f''(x) g''(x) + 4 f'(x) g'''(x) + f(x) g^{(4)}(x)$$

a dosadit.

Tento postup shrnuje následující věta o Leibnizově pravidlu.

$\boxed{\text{Věta 16}}$ (Leibnizovo pravidlo) Nechť $f^{(n)}(x)$ a $g^{(n)}(x)$ existují. Pak

$$(fg)^{(n)}(x) = (gf)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x).$$

Dk Indukcí! ① pro $\boxed{n=1}$ se jedná o Větu o derivování součinu.

$$LS = (fg)'(x)$$
$$PS = \underbrace{\binom{1}{0}}_{=1} f(x) g'(x) + \underbrace{\binom{1}{1}}_{=1} f'(x) g(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x).$$

② Ukážeme, že z platnosti tvrzení pro n, plyne platnost tvrzení pro $n+1$.

indukční předpoklad

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \left[(fg)^{(n)}\right]'(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)\right)'$$

Věta o derivování součinu

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left[f^{(k+1)}(x)\, g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)\, g^{(n-k+1)}(x)\right]$$

$$= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} f^{(l)}(x)\, g^{(n-l+1)}(x) + \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} f^{(l)}(x)\, g^{(n-l+1)}(x)$$

$l := k+1$ v první části

$l := k$ v druhé části

$$= \sum_{l=1}^{n}\left[\underbrace{\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l}}\right] f^{(l)}(x)\, g^{(n-l+1)}(x) + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(x)\, g^{(0)}(x) + \binom{n}{0} f^{(0)}(x)\, g^{(n+1)}(x)$$

$$= \frac{n!}{(n-l+1)!\,(l-1)!} + \frac{n!}{(n-l)!\,l!} = \frac{n!\,(n-l+l+1)}{(n-l+1)!\,l!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-l)!\,l!} = \binom{n+1}{l}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \binom{n+1}{l} f^{(l)}(x)\, g^{(n-l+1)}(x) + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=\binom{n}{n}} f^{(n+1)}(x)\, g^{(0)}(x) + \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=\binom{n}{0}} f^{(0)}(x)\, g^{(n+1)}(x)$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} f^{(l)}(x)\, g^{(n-l+1)}(x). \qquad \blacksquare$$

V závěru této kapitoly uvažujme funkce více proměnných a zavedeme pro ně derivaci ve směru (směrovou derivaci) a jako speciální případ parciální derivace.

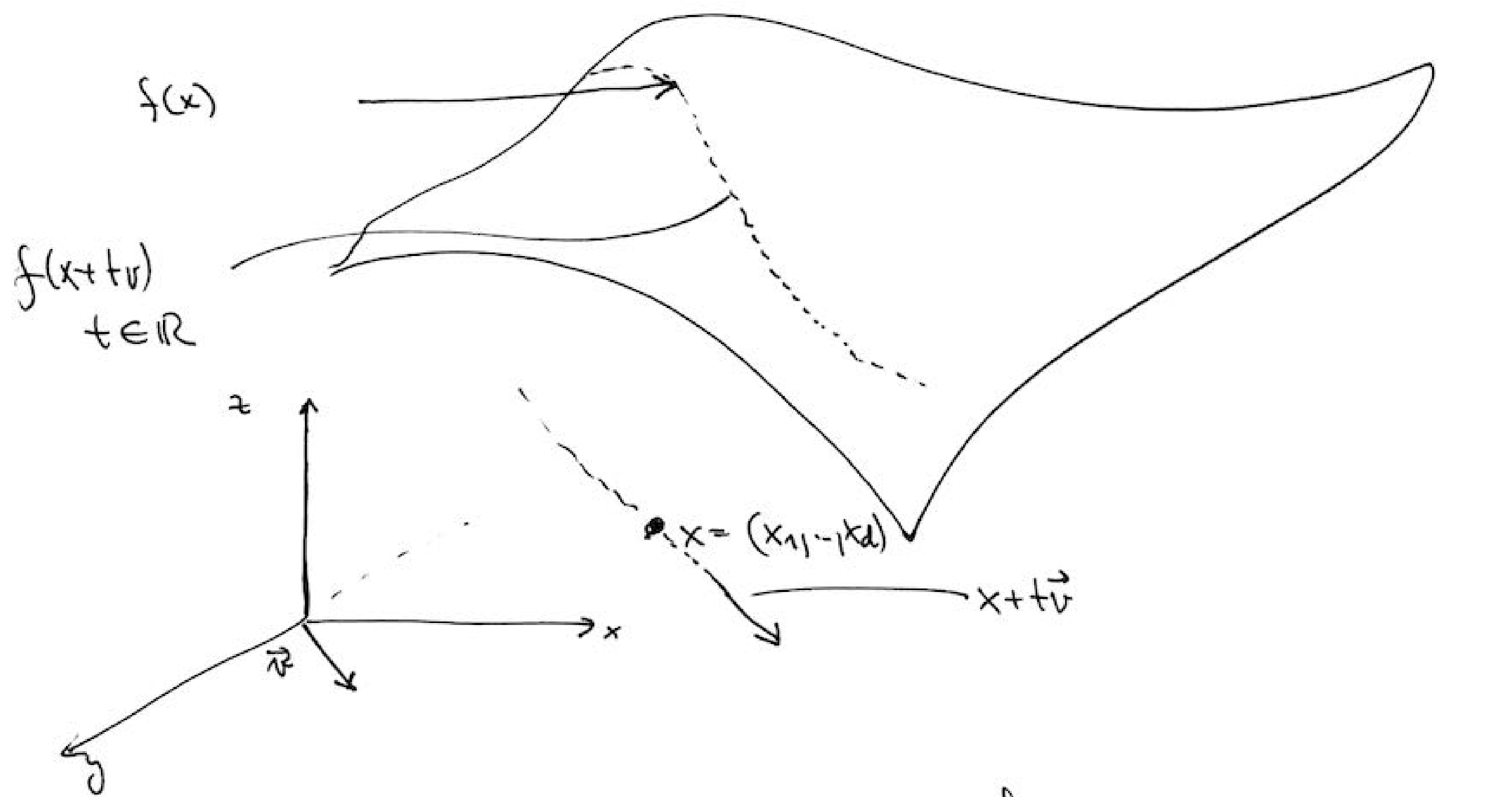
Def (Derivace f ve směru $\vec{v}$) Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a $x = (x_1, \dots, x_d)$. Buď $\vec{v} = (v_1, \dots, v_d)$, $|\vec{v}|_{\mathbb{R}^d} = 1$. Zavedeme $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(t) = f(x + t\vec{v})$$

Derivací f ve směru $\vec{v}$ v bodě x, značenou $\boxed{\partial_{\vec{v}} f(x)}$, definujeme

$$\partial_{\vec{v}} f(x) := g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\vec{v}) - f(x)}{t}$$

(viz obrázek).



Směrů $\vec v$ máme obecně ∞-mnoho. V $\mathbb{R}^d$ je jen d lineárně nezávislých vektorů. Uvažme standardní bázi

$\vec e_1 = (1,0,\dots,0)$ → Kroneckerovo delta

$\vec e_i = (0,\dots,\delta_{ij},\dots,0)$

$\vec e_d = (0,\dots,1)$

Pak tyto speciální směrové derivace ve směrech $\vec e_i$ nazýváme parciální derivace f dle x_i, tj.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) :\overset{df.}{=} \partial_{\vec e_i} f(x).}$$

Tedy

$$\boxed{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_i+t,\dots,x_d) - f(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_d)}{t}}$$

<u>Příklad</u> Pro $x=(x_1,\dots,x_d)$: $|x|_{\mathbb{R}^d} := \sqrt{x_1^2+\dots+x_d^2} : \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$.

Pak $\frac{\partial}{\partial x_i}|x|_{\mathbb{R}^d} = \frac{1}{2}\left(x_1^2+\dots+x_d^2\right)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{|\vec x|_{\mathbb{R}^d}}$.

a $$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}|x|_{\mathbb{R}^d} = -\frac{1}{2}\frac{x_i^2}{(x_1^2+\dots+x_d^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x_1^2+\dots+x_d^2)^{1/2}}$$

Tedy $$\Delta|x|_{\mathbb{R}^d} \overset{df.}{=} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}|x|_{\mathbb{R}^d} = -\frac{1}{|\vec x|^{1/2}} + \frac{d}{|x|^{1/2}} = \frac{d-1}{|x|}$$ ◻

Cvičení: Ukažte, že $-\Delta \frac{1}{|x|_{\mathbb{R}^3}} = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$

Věta 17 Platí Tabulka základních derivací:

Tabulka základních derivací

f	f'	D_f	$D_{f'}$	Poznámka
C	0	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$C \in \mathbb{C}$
$(x+a)^n$	$n\,(x+a)^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(0,\infty)$	$\bullet$	$\alpha \in \mathbb{C}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\bullet$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0,\infty)$	$\bullet$	
a^x	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$a > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0,\infty)$	$\bullet$	$a \in (0,1) \cup (1,\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$	$\bullet$	
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$	$\bullet$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1,1 \rangle$	$(-1,1)$	v ± 1 jednostranné derivace
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1,1 \rangle$	$(-1,1)$	v ± 1 jednostranné derivace
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
$\operatorname{tgh} x$	$1 - \operatorname{tgh}^2 x$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
$\operatorname{cotgh} x$	$1 - \operatorname{cotgh}^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\bullet$	$\operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
$\operatorname{arcsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	$\bullet$	$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$\operatorname{arccosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1,\infty)$	$\bullet$	$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\operatorname{arctgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1,1)$	$\bullet$	$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$
$\operatorname{arccotgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$	$\bullet$	$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$

Symbol "$\bullet$" znamená, že $D_{f'} = D_f$.

Dk Je založen na Větě o exponenciále a Větě o sinu/cosinu, definicích příslušných funkcí a Větách o derivování součtu, součinu, podílu, složeného a inverzního zobrazení. Podrobněji v dalším textu.

Ověření prvních dvou řádků Tabulky jsme již provedli (pro $C \in \mathbb{C}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$).

VĚTA O SINU A COSINU Existují právě dvě reálné funkce cos a sin: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a iracionální číslo π taková, že platí

(1) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $\quad(\forall x,y\in\mathbb{R})$

(2) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\quad(\forall x,y\in\mathbb{R})$

(3) $\sin(-x) = -\sin x$ a $\cos(-x) = \cos x$ $\quad(\forall x\in\mathbb{R})$

(4) sin je rostoucí na $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$

(5) $\sin 0 = 0$

(6) $(\sin x)'\big|_{x=0} = 1$ $\quad\left[\sin' x\big|_{x=0} = 1\right]$

VĚTA O EXPONENCIÁLE Existuje právě jedna funkce exp: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ taková, že

(7) $\exp(z_1+z_2) = \exp z_1 \exp z_2$ $\quad\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$

(8) $\exp(x+iy) = \exp x(\cos y + i\sin y)$ $\quad\forall x,y\in\mathbb{R}$

(9) $\exp 0 = 1$

(10) $(\exp x)' = \exp x$

(11) $\exp\big|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0,+\infty)$ je rostoucí

(12) pro $x\in\mathbb{R}^+$, $p,q\in\mathbb{N}$: $\exp\left(\frac{p}{q}\ln x\right) = \sqrt[q]{x^p}$

Tyto věty dokážeme později v LS 2019/20.

Nyní se zaměříme na důsledky těchto dvou vět a důkazy (většiny) tvrzení Věty 17.

Důsledky Platí: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \& \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \& \quad \cos 0 = 1}$ (13)

$\sin(x+0) = \sin x\cos 0 + \underbrace{\cos x \sin 0}_{0}$, $\underbrace{\sin(x+0)}_{\sin x}$ $\Rightarrow \cos 0 = 1$; neb z (6) + (5) plyne $1 = (\sin x)'\big|_{x=0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \overset{0}{\sin 0}}{x-0}$;

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x} \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x} \longrightarrow \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(14) $\boxed{\sin^2 y + \cos^2 y = 1}$

Z (8) $\exp iy = \cos y + i\sin y$
Z (8)+(3) $\exp(-iy) = \cos y - i\sin y$
$\Rightarrow$ $\cos y = \frac{1}{2}(\exp iy) + (\exp(-iy))$, $\sin y = \frac{1}{2i}(\exp iy - \exp(-iy))$

Tyto vztahy implikují tvrzení:

$$\cos^2 y + \sin^2 y = \frac{1}{4}\left[e^{2iy} + 2 + e^{-2iy} - \left(e^{2iy} - 2 + e^{-2iy}\right)\right] = \underline{1}$$

$$\boxed{(15)\qquad \sin' x = \cos x \quad \text{a} \quad \cos' x = -\sin x}$$

- Platí: $\sin' x = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$

$$= (\sin x) \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h^2}}_{\to -1/2} \underbrace{h}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1} = \underline{\cos x}$$

$$\cos' x = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

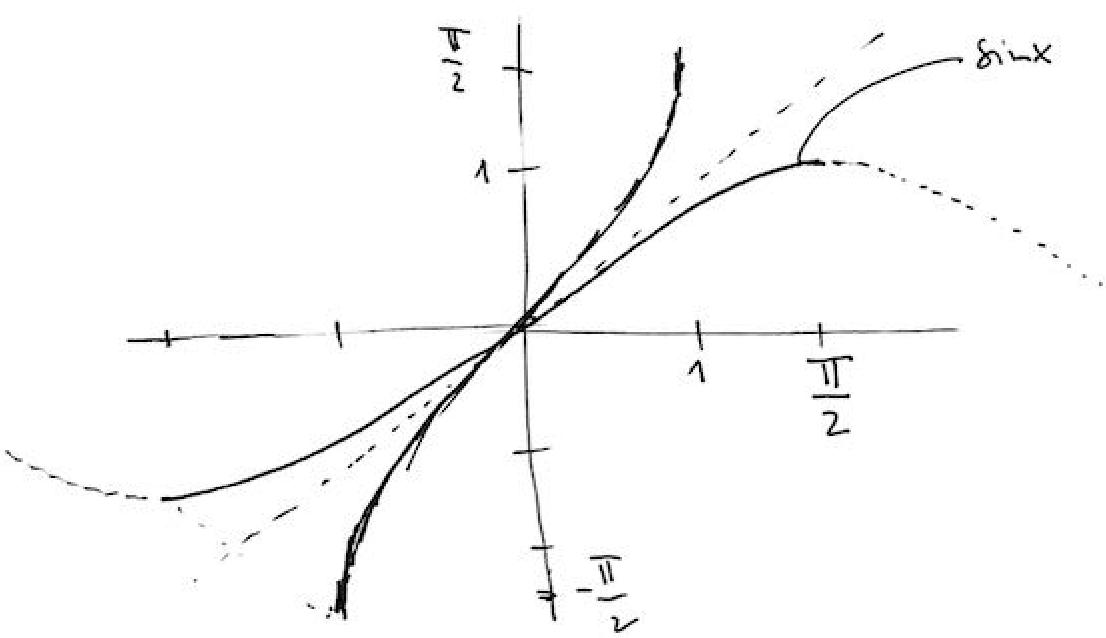
$$= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} h - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \underline{-\sin x}$$

Dále z (3), (4) a (14) plyne, že $\sin x : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle -1, 1 \rangle$ prostá a $\sin x$ je rostoucí, což implikuje $\cos x = (\sin x)' > 0$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(16) Tedy $\boxed{\text{existuje inverzní zobrazení } \sin^{-1} : \langle -1, 1 \rangle \xrightarrow{\text{na}} \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ prosté}}$ které je rostoucí. Toto zobrazení se značí <u>arcsin</u> a platí

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin' y \big|_{y = \arcsin x}} = \frac{1}{\cos y \big|_{y = \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \Bigg|_{y = \arcsin x}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}} \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$



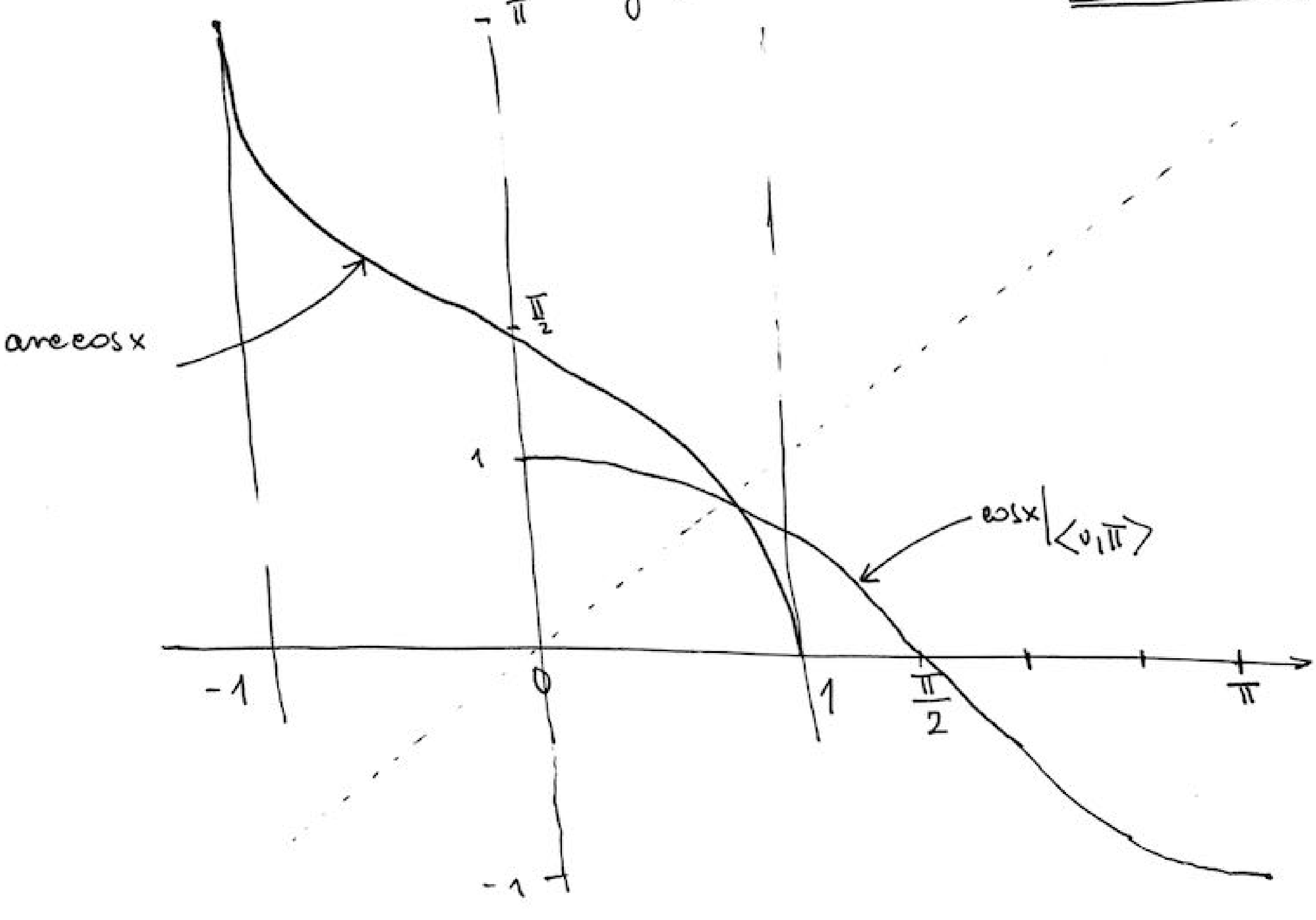
Podobně, protože $\cos : \langle 0,\pi\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle -1,1\rangle$ prostě a je zde (na $\langle 0,\pi\rangle$) klesající.

Tak

> (17) Existuje inverzní zobrazení $\cos^{-1}$, značený **arccos**, tak, že
>
> $$\arccos : \langle -1,1\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle 0,\pi\rangle \text{ prostě a je zde (na } \langle -1,1\rangle\text{) klesající}$$

a platí

$$\arccos' x = \frac{1}{\cos' y\,\Big|_{y=\arccos x}} = \frac{-1}{\sin \arccos x} = \underline{\underline{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}}$$



Obr. Grafy funkcí $\cos x\big|_{\langle 0,\pi\rangle}$ a inverzního zobrazení $\arccos x$.

(18) $\operatorname{tg} x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad D_{tg} = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ je lichá, π-periodická

$$\operatorname{tg}' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x}}} > 0 \quad \text{vždy v } D_{tg}$$

věta o derivování podílu

$\Rightarrow$ tg je na intervalech patřících do D_{tg} rostoucí.

Speciálně: $\boxed{\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\text{na}} (-\infty, +\infty) \text{ rostoucí spojitá}}$ lichá

$$\boxed{\operatorname{arctg} := (\operatorname{tg})^{-1} : (-\infty, \infty) \xrightarrow{\text{na}} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ rostoucí, spojitá}}$$

a platí

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{\operatorname{tg}' y \big|_{y = \operatorname{arctg} x}} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x)} =$$

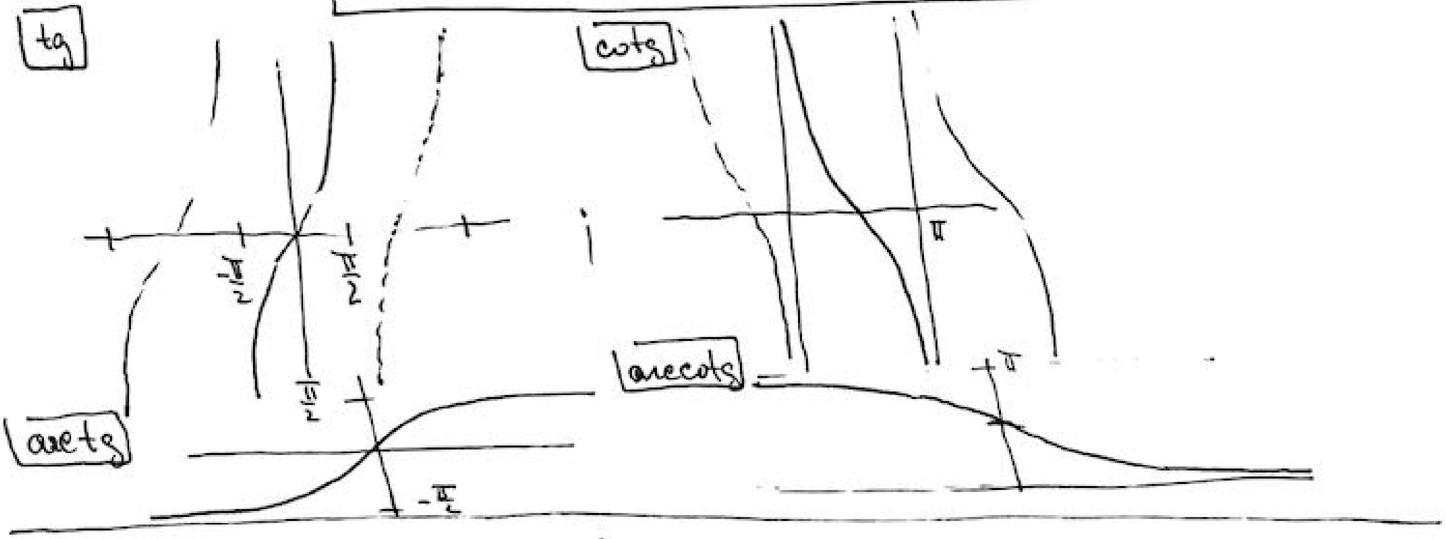
$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + x^2}}}$$

(19) Podobně: $\operatorname{cotg} x := \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\quad D_{cotg} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$

a $\boxed{\operatorname{cotg} x : (0, \pi) \xrightarrow{\text{na}} (-\infty, \infty) \text{ prostá a klesá}}$ *)

$$\operatorname{cotg}' x = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cotg} x \text{ je spojitá.}$$

Tedy $\boxed{\operatorname{arccotg} \overset{\text{ozn.}}{=} (\operatorname{cotg})^{-1} : (-\infty, \infty) \xrightarrow{\text{na}} (0, \pi) \text{ prostá, klesající spojitá}}$



*) není ani lichá, ani sudá neboť neplatí: $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$.

(20) Z (9) a (10) plyne $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\exp x-1}{x}=1}$ nebo (za chvíli) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

(21) Z (11) plyne existence $(\exp)^{-1}: (0,\infty)\xrightarrow{na}\mathbb{R}$ prosté. Toto zobrazení značíme $\ln := \exp^{-1}$ přirozený logaritmus.

Platí
$$(\ln x)' = \frac{1}{(\exp y)'\big|_{y=\ln x}} = \frac{1}{\exp y\big|_{y=\ln x}} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$
platný pro $\forall x\in(0,+\infty)$.

Z $\boxed{\exp 0=1}$ plyne mj. $\boxed{\ln 1=0}$

(22) Obecná exponenciála

Motivováni (12), definujeme $\boxed{a^x := \exp(x\ln a)}$ pro $a>0$ a $x\in\mathbb{R}$

Pro $\boxed{a=1}$ $a^x\equiv 1$

Pro $\boxed{a>1}$ $D_{a^x}=\mathbb{R}$, $R_{a^x}=(0,+\infty)$ rostoucí; $\boxed{(a^x)'=(\ln a)\,a^x}$

Pro $\boxed{a<1}$ —||— —||— klesající; —||—

Pro $a\neq1$ ∃ inverzní zobrazení $:(0,+\infty)\xrightarrow{na}\mathbb{R}$ značíme $\boxed{\ln_a x}:=(a^x)^{-1}$

$\ln_a x$ je rostoucí pro $a>1$ a klesající pro $a\in(0,1)$.

Platí
$$(\ln_a x)' = \frac{1}{(a^y)'\big|_{y=\ln_a x}} = \frac{1}{\ln a\; a^y\big|_{y=\ln_a x}} = \underline{\underline{\frac{1}{(\ln a)\,x}}}$$

Definujeme $e>1$ předpisem $\ln e=1$ $(\Leftrightarrow \exp 1=e)$

Pak je $\boxed{e^x \text{ totéž co } \exp x}$ a budeme používat zápis, který se nám bude více líbit.

(23) Obecná mocnina pro $\alpha\in\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $x>0$

$$x^\alpha := \exp(\alpha\ln x) \qquad x>0$$
$$= 0 \qquad x=0 \quad \text{je-li } \alpha>0$$

Tato definice se shoduje s předchozími, avšak $x^{\frac{p}{q}}$, pro $q\in\mathbb{Z}$, kde je $D_{x^{\frac{p}{q}}}=\mathbb{R}$.

Definiční obor pro x^α (shrnutí, rozšiřuje Tabulku)

$\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, q liché a $\begin{cases} \frac{p}{q} > 0 \\ \frac{p}{q} < 0 \end{cases}$	$D_{x^\alpha} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$
$\alpha > 0$	$D_{x^\alpha} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$\alpha < 0$ nebo $\alpha \in \mathbb{C}$	$D_{x^\alpha} = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

Pro $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$ již víme $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$

x^α: $\begin{cases} (0, +\infty) \xrightarrow{\text{na}} (0, +\infty) \text{ prosté } \alpha \\ \langle 0, +\infty) \xrightarrow{\text{na}} \langle 0, +\infty) \text{ prosté } \alpha \end{cases}$ rostoucí

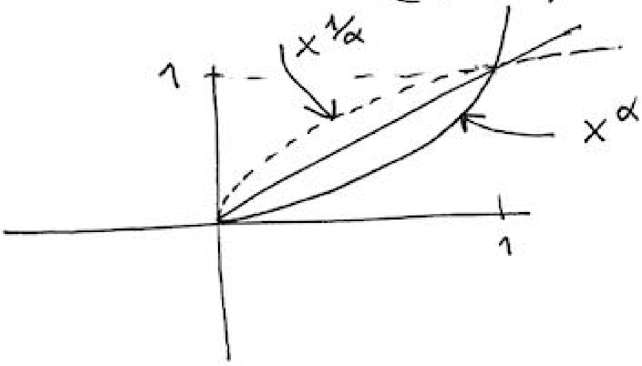
$x^{\frac{1}{\alpha}} := (x^\alpha)^{-1}$

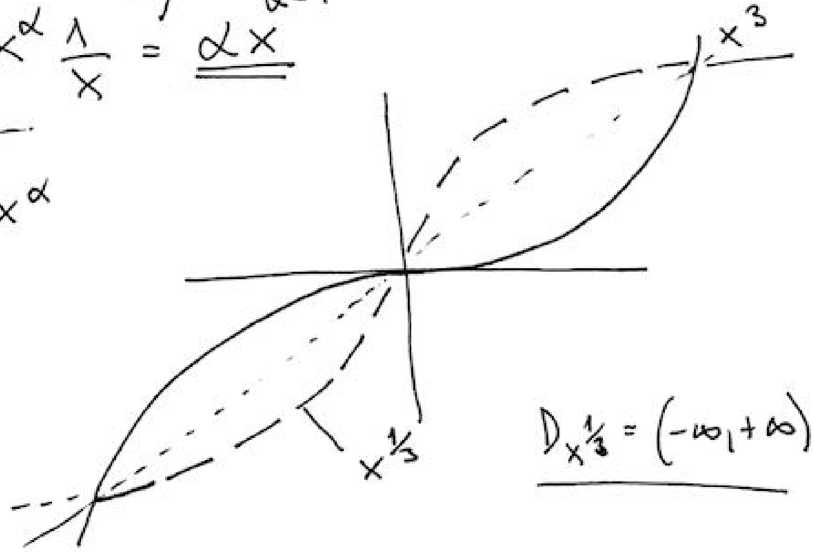
$\boxed{(x^{\frac{1}{\alpha}})' = \frac{1}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1}}$ neboť $(x^{\frac{1}{\alpha}})' = \frac{1}{(y^\alpha)'}\Big|_{y = x^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{\alpha y^{\alpha-1}}\Big|_{y = x^{\frac{1}{\alpha}}}$

$$= \frac{1}{\alpha x^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \underline{\underline{\frac{1}{\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1}}}$$

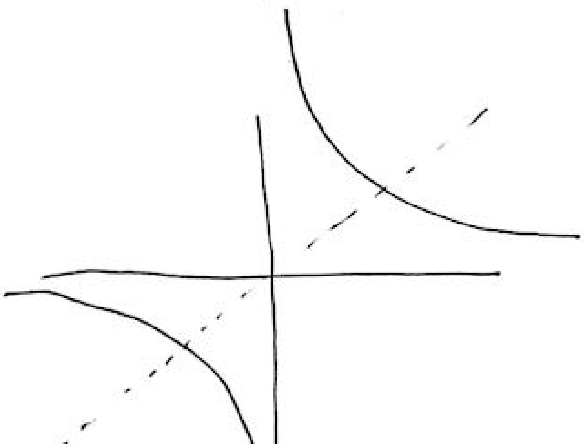
Pro $\boxed{\alpha \in \mathbb{C}}$ $(x^\alpha)' = \left(\exp\left((\alpha_1 + i\alpha_2) \ln x\right)\right)'$

$$= (\alpha_1 + i\alpha_2) x^\alpha \frac{1}{x} = \underline{\underline{\alpha x^{\alpha-1}}}$$





$D_{x^{\frac{1}{3}}} = (-\infty, +\infty)$.



$\frac{1}{x}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R} \setminus \{0\}$ klesající

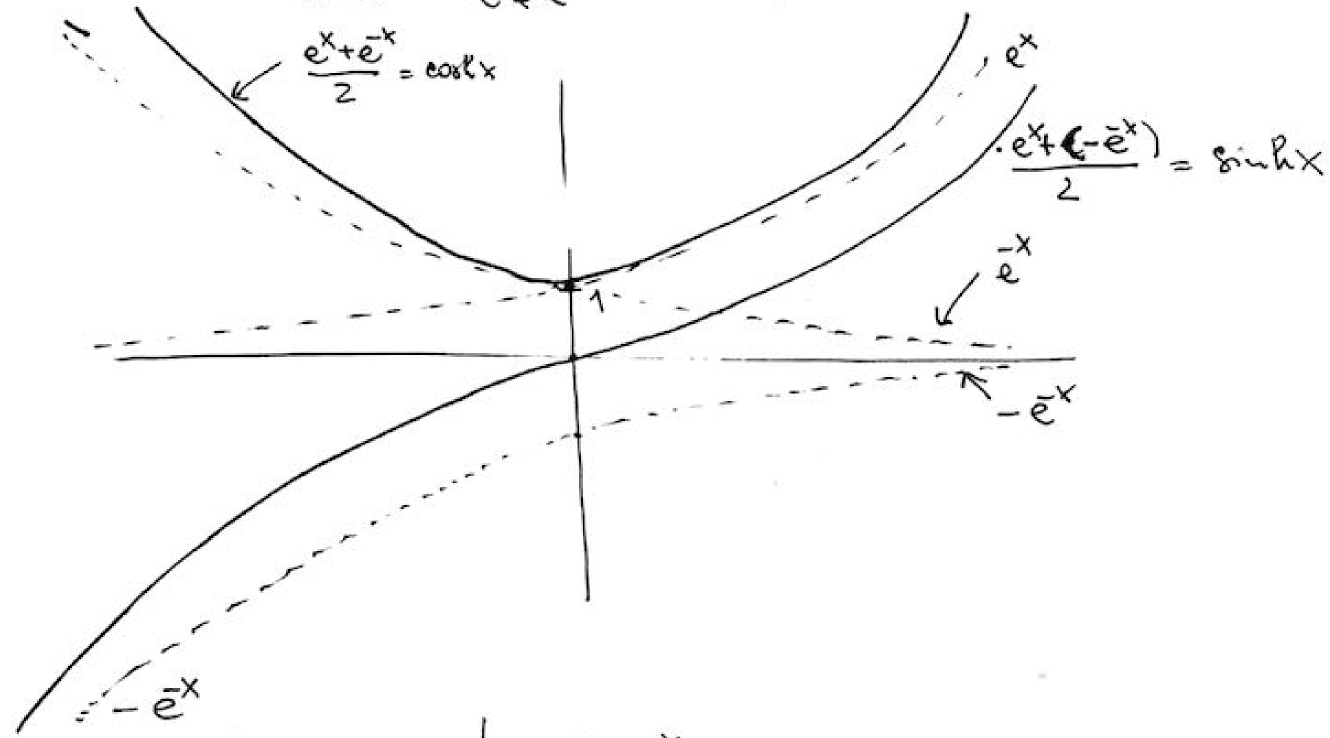
Inverzní funkce $\frac{1}{y}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R} \setminus \{0\}$ klesající.

(24) $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad D_{\cosh} = \mathbb{R}$, sudá , $R(\cosh) = \langle 1, +\infty)$

$\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad D_{\sinh x} = \mathbb{R}$ lichá , $R(\sinh x) = \mathbb{R}$

$\operatorname{tgh} x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad D_{\operatorname{tgh} x} = \mathbb{R}$ lichá

$\operatorname{cotgh} x := \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $\quad D_{\operatorname{cotg} x} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ lichá



Platí: $(\cosh)'(x) = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

$(\sinh x)'(x) = \cosh x$

Lze též spočíst explicitní tvar $\cosh x$. Označme $z = e^x$.
Hledáme inverzní zobrazení k $\cosh x$, tj. na $\langle 0, +\infty) \xrightarrow{\text{na}} \langle 1, +\infty)$ resp.

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \iff \underset{z = e^x > 0}{z + \frac{1}{z} = 2y} \iff z^2 - 2yz + 1 = 0$$

$$\implies z_{12} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$x_{12} = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$ a $x > 0$ jen pro $\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$

Tedy $(\cosh x)^{-1} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ Toto zobrazení se také značí $\operatorname{arc cosh} x$.

Platí $(\operatorname{arc cosh})'(x) = \dfrac{1}{\cosh' y \big|_{y = \operatorname{arccosh} x}} = \dfrac{1}{\sinh(\operatorname{arc cosh} x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$,

kde jsme využili vztah $\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$ ∎