

NOF4 162

ORGANIZACE

Přednášky Po 10:40

Čt 8:10

Cvičení Čt 16:30

Konsultace St 16:30 (od 10.3.)

Dí 1x týdně

Čt - Čt

le využít konsultaci
k dotazům (40 bodů k eu)

Zkoušky

NOF4 161

97 studentů připravil se takhle dělat zkušku u mě

6 nedokázalo započít

7 nešlo započít a nepišo na 71.

10 nešlo u Abovy (ale nikdo na 3 body)

10.9.2021

74 { 19 3
37 2
18 1

► Hodnocení u Abovy stejné jako u NOF4 161

► Zápis, videa / Dí na webu.

- Nebudou započítáni příměři
- Budou považováni Dí
- Započít se Dí & alikvity
- Co řídit?

► Témata

- Komplexní analýza
- Fourierova (a Laplaceova) transformace
s dodatek & Fourierova řada
- Teorie distribucí

15.

KOMPLEXNÍ ANALÝZA

aneb ÚVOD DO ANALÝZY KOMPLEXNÍCH FUNKCÍ KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

- Komplexní analýza je významná a jedna z nejfascinujících oblastí matematiky, což znamená a definice násobení komplexních čísel, které činí, na rozdíl od $\mathbb{R}^2$, a komplexních čísel těleso.
- Analýza komplexních funkcí (jedné komplexní proměnné (nebo také teorie holomorfních fce)) je nejen krásná, ale má i také fundamentální roli v různých oblastech matematiky (např. teorii parciálních diferenciálních rovnic).
- Časově lze komplexní analýzu vymezit jako významné období rozvoje doba 1800-1950 s předchůzci v pracích Leonarda Eulera (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) a Carla Gausse (1777-1855) a zlatým obdobím v pracích Augustina-Louise Cauchy (1789-1857), Bernharda Riemanna (1826-1866), Hermanna Schwarte (1843-1921) a Karla Weierstrasse (1815-1897).

15.1.

Připomenutí již probrané látky

► Definice $\mathbb{C}$ $\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{z = (z_1, z_2) ; z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$ kde máme dvě operace přičtení a násobení definované tak, že

$$z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow z + w = (z_1 + w_1, z_2 + w_2)$$

$$\Rightarrow z \cdot w = (z_1 w_1 - z_2 w_2, z_1 w_2 + z_2 w_1)$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je těleso a graficky zobrazujeme Gaussovu rovinu (*)

Terminologie: Je-li $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}$, pak $z_1 \dots$ Reálná část
 $z_2 \dots$ Imaginární část.

[Je-li $x \in \mathbb{R}$, pak zobrazujeme $(x, 0)$ a x a vedeme oň komplexní roviny a $\mathbb{R}$, a lze tak vnímat $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Speciálně: $0 = (0, 0)$ a $1 = (1, 0)$. Definujeme $\boxed{i = (0, 1)}$ IMAGINÁRNÍ JEDNOTKA

Tvrzení ($\forall z \in \mathbb{C}$) $z = (z_1, z_2)$ lze psát ve tvaru $z = z_1 + i z_2$

$$\textcircled{Dk} \quad \left. \begin{array}{l} z_1 = (z_1, 0) \\ i z_2 = (0, 1) \cdot (z_2, 0) = (0, z_2) \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 + i z_2 = (z_1, z_2).$$

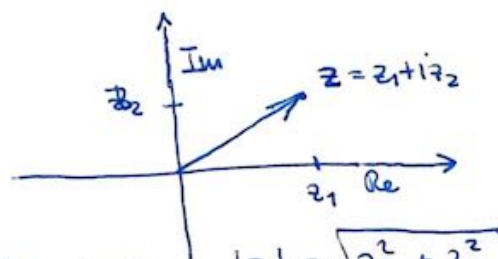
Tvrzení $i^2 = -1$

(Dě) $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$

□

Na $\mathbb{C}$ však nejsou všechny axiomy uspořádání a tak $\mathbb{C}$ nemá tak bohatou strukturu jako $\mathbb{R}$, ale na rozdíl od $\mathbb{R}^k = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k\text{-krát}}$ je $\mathbb{C}$ těleso, což mu dává bohatší strukturu než má samotné $\mathbb{R}^2$.

Gaussova rovina



$$z = (z_1, z_2) = z_1 + iz_2 \quad \mapsto \quad |z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

$$\mapsto \quad z = |z| e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

goniometrický tvar $z \in \mathbb{C}$

$$\mapsto \quad \bar{z} = z_1 - iz_2$$

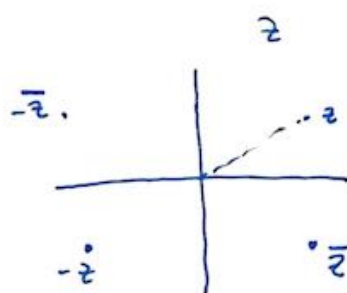
$$\mapsto \quad \arg z = \{ \varphi; \varphi_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

hodnoty argumentu komplexního čísla

$$\mapsto \quad \text{Arg } z = \varphi_0 \in (0, 2\pi)$$

$$\text{nebo } \in (-\pi, \pi)$$

hlavní hodnota argumentu



$$z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow z \cdot w = zw = |z||w| e^{i\varphi} e^{i\psi} = |z||w| e^{i(\varphi+\psi)}$$

Náhodou: dvou komplexních čísel je tolik jako komplexní číslo jehož velikost je součinem velikostí čísel z a w a úhel je dán součtem úhlů

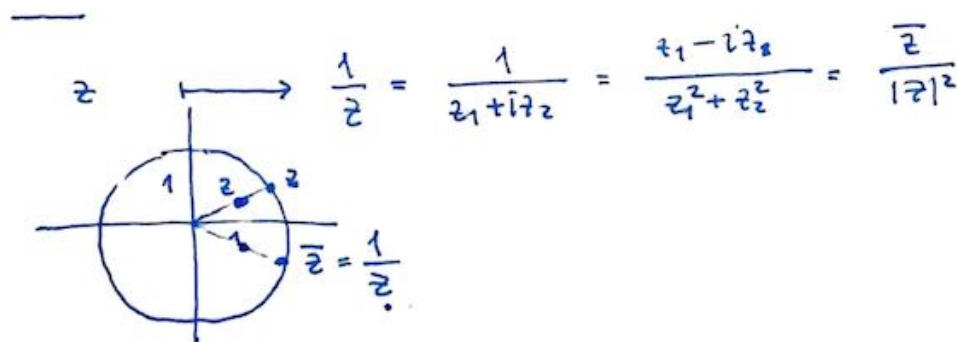
Příponu Taylorovy polynomy,
zavedení funkcí
 $\exp z, \cos z, \sin z$
 $\cosh z, \sinh z.$

$$\Rightarrow \quad z \cdot \bar{w} = (z_1 + iz_2)(w_1 - iw_2)$$

tahle

$$= z_1 w_1 + z_2 w_2 + i(z_1 w_2 - z_2 w_1)$$

$$= \vec{z} \cdot \vec{w} + i \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$



Metrika, topologie $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ a Riemannova sféra

$$(\mathbb{C}, |\cdot|) \text{ kde } |z| := \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = |z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}^2} \text{ je}$$

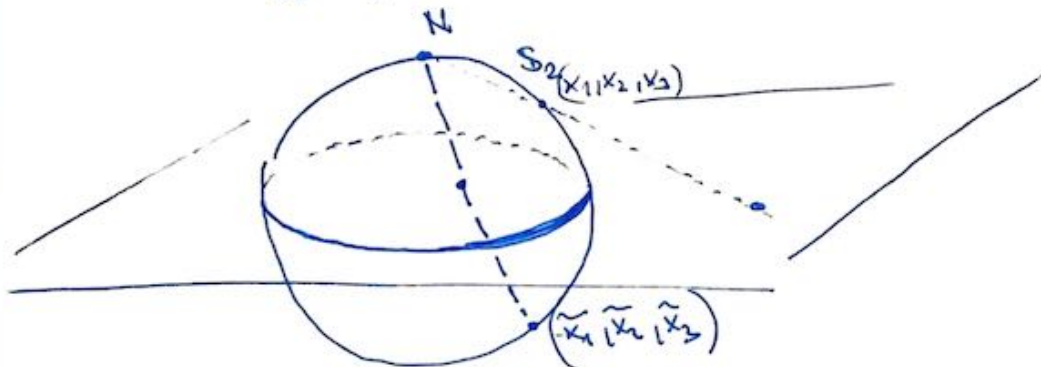
úplný normovaný prostor (dokonale metrický)

Konvergence v $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ konvergence po složkách

$$\max\{|Re z|, |Im z|\} \leq |z| \leq |Re z| + |Im z|$$

$$z_n \rightarrow z \text{ v } \mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |z_n - z| < \varepsilon$$

{ Spojitost
Konvergence
nelze dobře
definovat }



stereografická projekce $\kappa: (x_1, x_2, x_3) \in S_2 \setminus N \xrightarrow{\text{tzn. } x_3 \in (-1, 1)} \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3} \in \mathbb{C}$

což je bod $(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0)$, který spojujeme s bodem

$(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ a $(0, 0, 1)$ ležící na jímce

neboli bodu $z \in \mathbb{C}$ přiřadí jedinečnou bod na $S_2 \setminus N$, který dohromady s N tvoří S_2 a přitom spojuje N a z .

$$\kappa: B_1(0) \xrightarrow{\text{na}} S_2^- \text{ dolní polokoule}$$

$$\kappa: \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)} \xrightarrow{\text{na}} S_2^+ \setminus N$$

$$\kappa: \partial B_1(0) \xrightarrow{\text{na}} \partial B_1(0)$$

Motivací zavede

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\kappa: S^2 \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{C}^*$$

$$N \xrightarrow{\text{na}} \infty$$

$\boxed{v \mathbb{C}}$ topologie dle métriky

$$B_\varrho(z_0) = U_\varrho(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \varrho\}$$

$$B_\varrho(\infty) = U_\varrho(\infty) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \frac{1}{\varrho}\}$$

Operace s ∞

$$z + \infty = \infty + z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \{0\}$$

$$\frac{z}{0} = \infty \quad \forall z \neq 0 \quad \text{a} \quad \frac{z}{\infty} = 0 \quad \forall z \neq \infty$$

Nem' definováno: $\infty + \infty$

$$0 \cdot \infty$$

?

15.2 Derivace $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a Cauchy-Riemannovy podmínky

Def Bud $z \in \mathbb{C}$ a $f: U(z) \rightarrow \mathbb{C}$. Řekneme, že f má v z derivaci právě když existuje $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}$.

Tuto limitu značíme $f'(z)$, tzn.

$$(*) \quad \left[f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\substack{w=z+h \\ w \rightarrow z}} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} \right]$$

Def • Bud $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená. Řekneme, že f je holomorfní v Ω $\iff f'(z)$ existuje pro každé $z \in \Omega$.

$$\bullet H(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} ; f \text{ je holomorfní v } \Omega \}$$

Potvrdíme, že $(*) \iff \boxed{f(z+h) - f(z) = f'(z)h + o(|h|)} \quad (**)$

Platí následující tvrzení: Nechť $f'(z), g'(z)$ existují. Pak

(i) f je spojité v z

(ii) $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z); (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z);$

$[g(z) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g} \right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}]; (f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$

Příklady Z užití o derivování mocniných řad vidíme:

$$\bullet (a_n z^n)' = a_n n z^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet (\exp z)' = \exp z \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\bullet (z^{-n})' = \left(\frac{1}{z^n} \right)' = -\frac{1}{z^{n+1}} \quad z \neq 0$$

$$\bullet P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \in H(\mathbb{C})$$

$$\bullet \frac{P(z)}{Q(z)} \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_0 \in \mathbb{C}; Q(z_0) = 0\})$$

P, Q polynomy

! • $\bar{z} := x - iy$ nemá derivaci v žádném $z \in \mathbb{C}$.

Vsuvku: $\lim_{h=(h_1, h_2) \rightarrow 0=(0,0)} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = \begin{cases} 1 & h_2=0 \\ -1 & h_1=0 \end{cases}$

S pomocí
BINOMICKÉ
VĚTY

Q: Proč je naše poslední zjištění šorupia?

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ lze totiž zapsat ve tvaru

$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ a nahližet na ni jako funkci $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

a tak $f(z) = \bar{z} \Leftrightarrow f(x,y) = (x, -y)$

a f jakožto funkce $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. !!

Tzn., že funkce mají derivace a $\mathbb{C} \xrightarrow{d_z} \mathbb{C}$ je mnohem méně než funkce diferencovatelných a $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$[f(z) = z^2 \Leftrightarrow f(x,y) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = (x^2 - y^2, 2xy)]$$

Q: Lze charakterizovat funkce, které mají $f'(z)$?

Nechť $f'(z)$ existuje. Pak

$$\begin{aligned} f_1'(z) + i f_2'(z) &= f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f_1(x+h_1, y+h_2) - f_1(x,y) + i(f_2(x+h_1, y+h_2) - f_2(x,y))}{h_1 + ih_2} \\ &= \begin{cases} h_2 = 0 & \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h_1, y) - f_1(x,y)}{h_1} + i \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f_2(x+h_1, y) - f_2(x,y)}{h_1} \\ h_1 = 0 & \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f_1(x, y+h_2) - f_1(x,y)}{ih_2} + \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f_2(x, y+h_2) - f_2(x,y)}{h_2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) - i \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z) - i \frac{\partial f_1}{\partial y}(z) \end{cases} \end{aligned}$$

[Nutná]

(CR)

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(z) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z) \end{cases}$$

Cauchy - Riemannovy podmínky

Příklad Funkce $f(z) = z_1 + i2z_2$, se napíše $f(x,y) = (x, 2y)$, je $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale nemá derivaci $f'(z)$ nikde v $\mathbb{C}$, neboť (CR) mají tvar $\begin{pmatrix} 1=0 \\ 0=2 \end{pmatrix}$ $\square$

Věta 15.2 (Dirichlet Cauchy-Riemannovy podmínky)

Označme $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

Pak platí

(1) f splňuje (CR) $\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ a } f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}}$

(2) f splňuje (CR) $\Rightarrow \operatorname{Re} f = f_1$ a $\operatorname{Im} f = f_2$ jsou harmonické
tzn. $\Delta f_1 = 0$ a $\Delta f_2 = 0$, kde $\Delta := \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

(Dě) (1) $\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} + i \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) = 0$
a $\frac{\partial f}{\partial z} = 2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - i \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial f}{\partial z}$

Dále platí

(*) $\boxed{f(z+h) - f(z) = h \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \bar{h} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) + o(h)}$ OVERTG! *)

Odmů $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f'(z)$.

[2] $0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) + i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right)$
 $= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} \right) + i \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \right)$
 $= \frac{1}{4} \Delta f_1 + i \frac{1}{4} \Delta f_2$

nebo přímo

$\Delta f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \stackrel{(CR)}{=} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \stackrel{(CR)}{=} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 0$

(*) $f(z+h) - f(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(|h|) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y} h_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y} h_2 \right) + o(|h|)$
 $= \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 + o(|h|) \stackrel{\uparrow f=f_1+i f_2}{=} \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 + o(|h|) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{h+\bar{h}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{h-\bar{h}}{2i} + o(|h|)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \bar{h} + o(|h|) = \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h} + o(|h|)$ Q.E.D.

Věta 15.3. Důležitý (CR) podmíněk

- Je-li $f'(z) = 0$ v $\Omega \subset \mathbb{C}$ všude, konstanta (nebo. v $\Omega = \mathbb{C}$),
pak $f \equiv \text{konstanta}$.

- Jestliže $f(z) = f_1(z) + i f_2(z)$ v $\Omega \subset \mathbb{C}$ všude, konstanta a $\text{Re } f = f_1$ nebo
 $\text{Im } f = f_2$ nebo $|f|$ konstanta, pak $f \equiv \text{konst.}$ v Ω .

- (D₂) • $f'(z) = 0$ implikuje $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$ a t (CR)
 $2 \frac{\partial f_1}{\partial z}$ $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$ a $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$.
- Tedy $\nabla f_1 = 0$ a $\nabla f_2 = 0$ v $\Omega \Rightarrow f_1 = \text{konst.}_1$ a $f_2 = \text{konst.}_2$ v Ω .
- $f_1 = \text{konst.} \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \Rightarrow \nabla f_2 = 0 \Rightarrow f_2$ je konst. v Ω .

- Je-li $|f|$ konstanta, pak $|f|^2 = f_1^2 + f_2^2 = \text{konst.}$

odsud $2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + 2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$ CR $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \\ f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \end{array} \right]$
 $2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + 2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$

2 rovnice pro 2 neznámé

$$(f_1^2 + f_2^2) \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \quad \text{a} \quad (f_1^2 + f_2^2) \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow \nabla f_1 = 0$$

$$\Rightarrow f_1 = \text{konst.} \text{ a dle předchozího } f_2 = \text{konst.}$$

□