Matematika pro fyziky I

ZS 2020/21, MFF UK, NOFY161

Domácí úkol č. 12

1. Buďte $a, b \in \mathbb{R}$. Nechť $f(x) = ax$ pro $x \in (-\pi, 0)$, $f(x) = bx$ pro $x \in (0, \pi)$.

- Najděte Fourierovu řadu funce f na intervalu $(-\pi, \pi)$.
- Rozšiřte funkci f na celé $\mathbb{R}$ tak, aby se tvar její Fourierovy řady nezměnil.
- Vyšetřete konvergenci řady – bodovou, stejnoměrnou a v $L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

2.

- Nechť $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Které koeficienty Fourierova rozvoje funkce f se anulují, jestliže platí $f(-x) = f(x)$ a $f(x + \pi) = -f(x)$?
- Jak se prodlouží funkce $f \in L^2(0, \frac{\pi}{2})$ na interval $(-\pi, \pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx)$?

3. Spočtěte sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

(Můžete použít výsledky $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ ukázané na cvičení.)