Termín pro odevzdání: čtvrtek 13. května 2021

Postupem analogickým tomu ze cvičení nalezněte tzv. fundamentální řešení pro operátor $\Delta^2 + k^4$, tedy řešení rovnice

$$\Delta^2 u + k^4 u = \delta\,, \qquad \text{v } \mathbb{R}^3\,.$$

Tzv. biharmonický operátor je definován následovně $\Delta^2 u = \Delta\Delta u$, dále $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ a δ značí Diracovu distribuci.

Postup:

1. Na rovnici formálně aplikujte Fourierovu transformaci $\mathcal{F}$ a využijte zatím "z nebe" spadlou identitu $\mathcal{F}(\delta) = 1$ a vyjádřete $\mathcal{F}(u)$. Tyto úpravy chápejme zatím jako zcela formální s tím, že dobrý smysl jim dáme v blížící se kapitole o distribucích.
2. Proveďte inverzi $\mathcal{F}(u)$ v klasickém smyslu (diskutujte, v jakém z prostorů, pro které máme Fourierovu transformaci definovanou, pracujete). Na výpočet se Vám může hodit vzoreček pro Fourierovu transformaci radiálních funkcí v $\mathbb{R}^3$, který jsme si uvedli na cvičení, a který si pro jistotu připomeňme (označme $\rho = |\xi|$, $r = |x|$):
$$\mathcal{F}(g(r))(\rho) = \frac{2}{\rho}\lim_{R\to\infty}\int_0^R g(r) r \sin(2\pi r\rho) dr\,.$$
3. Při výpočtu integrálu použijte reziduovou větu a všechny kroky (alespoň stručně) zdůvodněte.

Řešení:

Aplikaci F.T. získáme

$$((-4\pi|\xi|^2)^2 + k^4)\mathcal{F}(u) = 1\,,$$

odkud tedy

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{16\pi^4|\xi|^4 + k^4} \in L^1(\mathbb{R}^3)\,,$$

je radiálně symetrická. Jelikož je navíc reálná, vidíme, že (označme $\rho = |\xi|$, $r = |x|$)

$$u(r) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{16\pi^4\rho^4 + k^4}\right) = \overline{\mathcal{F}\left(\frac{1}{16\pi^4\rho^4 + k^4}\right)} = \lim_{R\to\infty}\frac{2}{r}\int_0^R \frac{\rho\sin(2\pi r\rho)}{16\pi^4\rho^4 + k^4} d\rho\,.$$

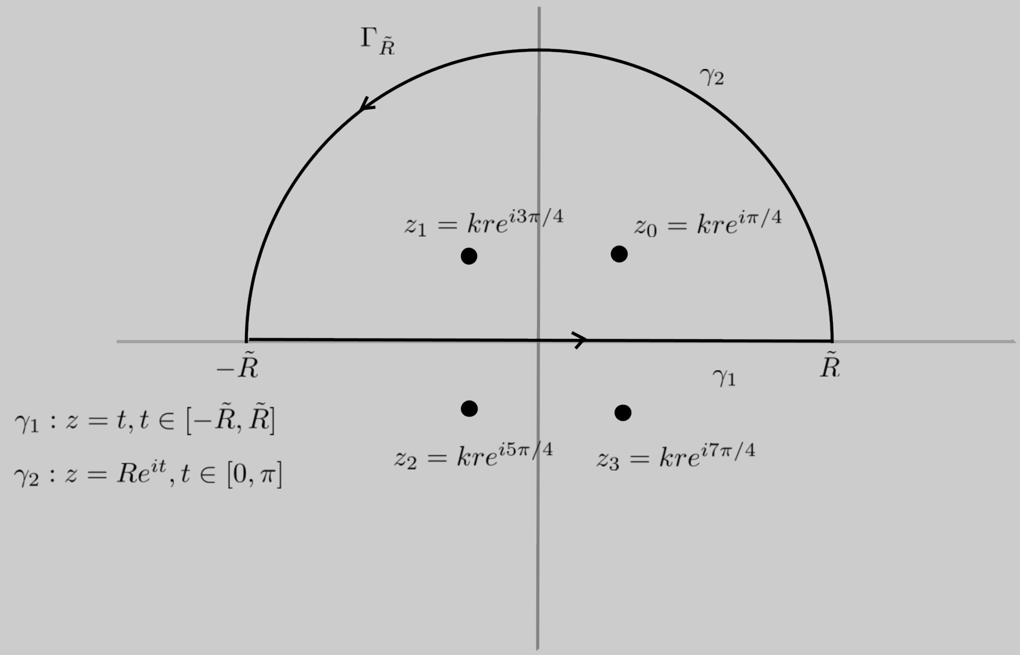
Integrovaná funkce je sudá, provedeme tedy již tradiční kaskádu úprav:

$$\frac{2}{r}\int_0^R \frac{\rho\sin(2\pi r\rho)}{16\pi^4\rho^4 + k^4} d\rho = \frac{1}{r}\int_{-R}^R \frac{\rho\sin(2\pi r\rho)}{16\pi^4\rho^4 + k^4} d\rho = \frac{1}{r}\mathrm{Im}\left(\int_{-R}^R \frac{\rho e^{2\pi i r\rho}}{16\pi^4\rho^4 + k^4} d\rho\right)\,.$$

Integrand si ještě trochu upravme substitucí $s = 2\pi r\rho$, čímž dostaneme

$$u(r) = \mathrm{Im}\underbrace{\left(\lim_{\tilde{R}\to\infty}\frac{r}{4\pi^2}\int_{-\tilde{R}}^{\tilde{R}} \frac{s e^{is}}{s^4 + r^4k^4} ds\right)}_{=:J},$$

kde jsme si označili $\tilde{R} = 2\pi r R$. Integrál vyřešíme již rutinně přechodem ke komplexní proměnné a integrací po křivce na obrázku s využitím reziduové věty a Jordanova lemmatu.



Podrobněji: Zaveďme si komplexní funkci

$$f(z) = \frac{ze^{\mathrm{i}z}}{z^4 + (rk)^4}\,,$$

jejíž póly jsou řešení

$$z^4 = -(rk)^4 = (rk)^4 e^{\mathrm{i}\pi + 2\mathrm{i}\pi n}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

tedy

$$z_i = rk\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)} \qquad n = 0, 1, 2, 3 \qquad \text{(jednonásobné)}\,.$$

Jordanovo lemma pro kladný faktor v exponenciele nám velí integraci po horním oblouku, tedy uvnitř integrační křivky leží pouze póly z_0 a z_1. Předpoklady Jordanova lemmatu jsou splněné, neb platí

$$\max_{\Gamma_2}\left|\frac{z}{z^4 + (rk)^4}\right| \sim \frac{1}{R^3} \xrightarrow{R\to\infty} 0\,.$$

Reziudová věta spolu s Jordanovým lemmatem nám tedy dají

$$J = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}_{z_0} f(z) + \mathrm{Res}_{z_1} f(z)\right)\,.$$

Zbývá dopočíst obě rezidua:

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z) = \frac{ze^{\mathrm{i}z}}{4z^3}\bigg|_{z=z_0=kre^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{\mathrm{i}kr\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)}}{4(kr)^2 \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=\mathrm{i}}} = \frac{e^{-\frac{kr}{\sqrt{2}}} e^{\frac{\mathrm{i}kr}{\sqrt{2}}}}{4\mathrm{i}(kr)^2}\,,$$

$$\mathrm{Res}_{z_1} f(z) = \frac{ze^{\mathrm{i}z}}{4z^3}\bigg|_{z=z_1=kre^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{\mathrm{i}kr\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)}}{4(kr)^2 \underbrace{e^{i\frac{3\pi}{2}}}_{=-\mathrm{i}}} = -\frac{e^{-\frac{kr}{\sqrt{2}}} e^{\frac{-\mathrm{i}kr}{\sqrt{2}}}}{4\mathrm{i}(kr)^2}\,.$$

Celkem tedy dostáváme

$$u = \mathrm{Im}J = \frac{r}{4\pi^2}\mathrm{Im}\left(2\pi\mathrm{i}\frac{e^{-\frac{kr}{\sqrt{2}}}}{2(kr)^2}\frac{e^{\frac{\mathrm{i}kr}{\sqrt{2}}} - e^{\frac{-\mathrm{i}kr}{\sqrt{2}}}}{2\mathrm{i}}\right) = \frac{e^{-\frac{kr}{\sqrt{2}}}}{4\pi k^2 r}\sin\left(\frac{kr}{\sqrt{2}}\right)\,.$$