Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	8	7	7	7	7	36
Získáno						

[8] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^2\left([1,2]\right) \mid y(1) = \frac{3}{2},\ y'(1) = 3,\ y(2) = \frac{14}{3} + \ln 2,\ y'(2) = \frac{9}{2} \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_1^2 \left(x^3 \left(y''\right)^2 - 12xy \right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnic pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gateaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nezáporná.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) \right|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y + th) = \int_1^2 \left(x^3 \left(y'' + th''\right)^2 - 12x(y + th) \right) \mathrm{d}x$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) = \int_1^2 \left(2x^3 \left(y'' + th''\right) h'' - 12xh \right) \mathrm{d}x$$

po dosazení $t = 0$ dostaneme

$$\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) \right|_{t=0} = \int_1^2 \left(2x^3 y'' h'' - 12xh \right) \mathrm{d}x$$

a proto

$$D\Phi(y)[h] = \int_1^2 \left(2x^3 y'' h'' - 12xh \right) \mathrm{d}x$$

Po dvojnásobné integraci *per partes* dostaneme

$$D\Phi(y)[h] = \int_1^2 \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \left(2x^3 y'' \right) - 12x \right] h \,\mathrm{d}x$$

kde jsme využili skutečnost, že testovací "směr" h je zvolen z prostoru N, kde

$$N = \left\{ g \in \mathcal{C}^2\left([1,2]\right) \mid g(1) = 0,\ g'(1) = 0,\ g(2) = 0,\ g'(2) = 0 \right\}$$

Použijeme základní lemma variačního počtu a vidíme, že Eulerovy–Lagrangeovy rovnice příslušného funkcionálu jsou

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \left(2x^3 y'' \right) - 12x = 0.$$

Předtím, než se pustíme do řešení Eulerových–Lagrangeových rovnic, spočteme ještě druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. Druhou derivaci funkcionálu Φ spočteme podle předpisu

$$D^2\Phi(y)[h,h] = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D\Phi(y + th)[h] \right|_{t=0} = \left. \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_1^2 \left(2x^3 (y'' + th'')h'' - 12xh \right) \mathrm{d}x \right) \right|_{t=0} = 2 \int_1^2 x^3 \left(h''\right)^2 \mathrm{d}x \geq 0.$$

Druhá derivace tedy nezávisí na y, což se dalo očekávat, neboť funkcionál je “kvadratický” v y, a navíc je zřejmé, že druhá derivace je vždy nezáporná. Speciálně tedy bude nezáporná i v bodě y_{ext}. (Pokud se nám takovýto bod podaří najít řešením Eulerových–Lagrangeových rovnic.)

Řešme nyní Eulerovu–Lagrangeovu rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(2x^3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = 12x.$$

Integrace postupně vede na rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x^3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) &= 6x^2 + C_1,\\ 2x^3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= 2x^3 + C_1 x + C_2,\end{aligned}$$

poslední rovnici vydělíme x^3 (pracujeme na intervalu $[1,2]$ takže dělení x^3 je vpořádku) a další integrace postupně vede na rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x - \frac{C_1}{2}\frac{1}{x} - \frac{C_2}{4}\frac{1}{x^2} + C_3,\\ y &= \frac{x^2}{2} - \frac{C_1}{2}\ln x + \frac{C_2}{4}\frac{1}{x} + C_3 x + C_4,\end{aligned}$$

kde $\{C_i\}_{i=1}^4$ jsou integrační konstanty. Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek, má být

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{C_2}{4} + C_3 + C_4,\\ \frac{14}{3} + \ln 2 &= 2 - \frac{C_1}{2}\ln 2 + \frac{C_2}{8} + 2C_3 + C_4,\\ 3 &= 1 - \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{4} + C_3,\\ \frac{9}{2} &= 2 - \frac{C_1}{4} - \frac{C_2}{16} + C_3,\end{aligned}$$

odkud

$$C_1 = -2, \qquad C_2 = \frac{16}{3}, \qquad C_3 = \frac{7}{3}, \qquad C_4 = -\frac{8}{3},$$

a proto

$$y_{\mathrm{ext}} = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}\frac{1}{x} + \ln x - \frac{8}{3}.$$

[7] 2. Buď dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ předpisem

$$f_n(x) =_{\text{def}} \begin{cases} (-1)^n n, & x \in \left(n^2 - \frac{1}{n}, n^2 + \frac{1}{n}\right), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \left(n^2 - \frac{1}{n}, n^2 + \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Spočtěte bodovou limitu této posloupnosti a označte ji f. Zjistěte, zda posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f

1. na intervalu $I = (0, K)$, kde $K \in \mathbb{R}^+$ je libovolné pevné číslo,
2. na intervalu $J = (0, +\infty)$.

Přímým výpočtem zjistěte, zda platí

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

aneb zda platí

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Nejprve spočteme bodovou limitu. Pro pevně zvolené $x \in \mathbb{R}$ zjevně platí

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

(Jakmile je $n > x$, jedná se o posloupnost samých nul.)

Stejnoměrnou konvergenci vyšetříme s použitím ekvivalentní charakterizace. Platí věta

> Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnost reálných funkcí jedné reálné proměnné. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \to +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb
>
> $$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$
>
> právě když pro $n \to +\infty$ platí
>
> $$\sigma_n \to 0,$$
>
> kde
>
> $$\sigma_n =_{\text{def}} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|.$$

Nejprve se budeme zabývat intervalem I. Označme si $\chi_{\left(n^2-\frac{1}{n}, n^2+\frac{1}{n}\right)}$ charakteristickou funkci intervalu $\left(n^2 - \frac{1}{n}, n^2 + \frac{1}{n}\right)$, to jest

$$\chi_{\left(n^2-\frac{1}{n}, n^2+\frac{1}{n}\right)} =_{\text{def}} \begin{cases} 1, & x \in \left(n^2 - \frac{1}{n}, n^2 + \frac{1}{n}\right), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \left(n^2 - \frac{1}{n}, n^2 + \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Na intervalu I tedy zkoumáme chování posloupnosti

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,K)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,K)} \left|(-1)^n \chi_{\left(n^2-\frac{1}{n}, n^2+\frac{1}{n}\right)}\right| = \begin{cases} |(-1)^n n|, & \text{je-li } \left(n^2 - \frac{1}{n}, n^2 + \frac{1}{n}\right) \subset (0, K), \\ 0 & \text{je-li } \left(n^2 - \frac{1}{n}, n^2 + \frac{1}{n}\right) \not\subset (0, K). \end{cases}$$

Je-li K pevně dané kladné reálné číslo, tak je posloupnost σ_n od jistého n posloupností samých nul. (Interval $\left(n^2 - \frac{1}{n}, n^2 + \frac{1}{n}\right)$, který se s rostoucím n posouvá po číselné ose směrem k nekonečnu, "vyběhne" pro jisté n z intervalu $(0, K)$.) Je tedy zjevné, že $\sigma_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, a *konvergence je tedy na intervalu I stejnoměrná.*

Na intervalu $J = (0, +\infty)$ použijeme stejnou charakterizaci stejnoměrné konvergence, budeme tedy zkoumat posloupnost

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,+\infty)} \left|(-1)^n \chi_{\left(n^2-\frac{1}{n}, n^2+\frac{1}{n}\right)}\right| = \begin{cases} |(-1)^n n|, & \text{je-li } \left(n^2 - \frac{1}{n}, n^2 + \frac{1}{n}\right) \subset (0, +\infty), \\ 0 & \text{je-li } \left(n^2 - \frac{1}{n}, n^2 + \frac{1}{n}\right) \not\subset (0, +\infty). \end{cases}$$

Zjevně vždy nastává první možnost a je tedy $\sigma_n = n$, a proto $\sigma_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Podle použité věty o ekvivalentní charakterizaci stejnoměrné konvergence tedy kovergence na intervalu $(0, +\infty)$ *není stejnoměrná.*

Přímým výpočtem získáme

$$\int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

a dále

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{x=n^2-\frac{1}{n}}^{n^2+\frac{1}{n}} (-1)^n n\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} 2(-1)^n,$$

odkud je vidět, že limita $\lim_{n\to+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje. Rovnost $\lim_{n\to+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ tedy neplatí.

[7] 3. Uvažujte funkci definovanou pro $b \in (0, +\infty)$ integrálem

$$I(b) =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že tato funkce je na svém definičním oboru dvakrát diferencovatelná, a že je pro $b \in (0, +\infty)$ řešením diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}b^2} + I = \frac{1}{b}.$$

Řešení:

Nejprve provedeme formální výpočet. Jest

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -\int_{x=0}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

a dále

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}b^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_{x=0}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} -\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{x\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Dosazením do levé strany rovnice tedy dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}b^2} + I = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-bx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-bx}}{a}\right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{b}.$$

Je tedy zjevné, že funkce $I(b)$ splňuje danou diferenciální rovnice. Zbývá ověřit, že lze provést záměnu derivace a integrálu, aneb musíme ověřit, že platí formální rovnost (1) a (2). K tomu použijeme (dvakrát) větu o záměně derivace a integrálu, která říká:

Buď $f(x, b) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}$. Nechť platí

- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné b je diferencovatelná pro skoro všechna $x \in I$.
- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky měřitelná pro všechna $b \in J$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $g : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $b \in J$ platí $\left|\frac{\partial}{\partial b} f(x, b)\right| \leq g(x)$.
- Existuje $b_0 \in J$ tak, že funkce $f(x, b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I.

Pak je pro každé $b \in J$ funkce $f(x, b)$, jakožto funkce x, lebesguovsky integrovatelná na I, funkce

$$F(b) = \int_I f(x, b)\mathrm{d}x$$

je diferencovatelná na I a platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_I \frac{\partial}{\partial b} f(x, b)\mathrm{d}x.$$

Při rozboru rovnosti (1) tedy ztotožníme $I = (0, +\infty)$ (interval, přes který se integruje) a $J = (0, +\infty)$ (interval ve kterém se nachází parametr). Integrand je v tomto případě

$$f(x, b) =_{\mathrm{def}} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}$$

a parciální derivace podle parametru je

$$\frac{\partial}{\partial b} f(x, b) = \frac{-x\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}.$$

První předpoklad věty – diferencovatelnost $f(x, b)$ vůči parametru – je zjevně splněn, druhý předpoklad věty – měřitelnost – plyne ze spojitosti $f(x, b)$. Funkce $f(x, b)|_{b=0}$ je navíc integrovatelná, integrál $\int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ dokonce dokážeme explicitně vyčíslit. Zbývá navrhnout integrovatelnou majorantu pro derivaci, aneb hledáme integrovatelnou funkci g tak, aby platilo

$$\left|\frac{\partial}{\partial b} f(x, b)\right| = \left|\frac{-x\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\right| = \frac{x}{1+x^2}\mathrm{e}^{-bx} \leq g(x).$$

Funkce $\frac{x}{1+x^2} \sim \frac{1}{x}$ není integrovatelná “v nekonečnu”, nemůžeme tedy použít odhad

$$\frac{x}{1+x^2}\mathrm{e}^{-bx} \leq \frac{x}{1+x^2},$$

neboť by to byl odhad funkcí, která není integrovatelná. Alespoň “kousek exponenciály” zjevně pořebujeme. To zařídíme takto. Volme nyní $J = (\delta, +\infty)$, kde $\delta \in \mathbb{R}^+$ je nějaké libovolné, ale pevné kladné reálné číslo. (Parametr b tedy volíme z menšího intervalu $b \in (\delta, +\infty)$ než v předchozím případě.) Pak ovšem můžeme psát

$$\frac{x}{1+x^2}\mathrm{e}^{-bx} \leq \mathrm{e}^{-bx} \leq \mathrm{e}^{-\delta x},$$

a jako integrovatelnou majorantu volíme $g(x) =_{\mathrm{def}} \mathrm{e}^{-\delta x}$. Použitím věty pak dostaneme:

$$\forall b \in (\delta, +\infty) : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

Jelikož δ je libovolné pevné reálné číslo, můžeme z předchozího usoudit, že dokonce platí

$$\forall b \in (0, +\infty) : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

(Pamatujte, že derivace je *lokální vlastnost.*)

V případě druhé záměny derivace a integrálu (2) postupujeme obdobně. Nyní ovšem ve větě volíme

$$f(x,b) =_{\mathrm{def}} -\frac{x\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}$$

a následně proto

$$\frac{\partial}{\partial b} f(x,b) =_{\mathrm{def}} \frac{x^2\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}.$$

Problémem je opět najít majorantu, potřeba přítomnosti exponenciály při konstrukci integrovatelné majoranty je nyní ještě zřejmější, neboť v nekonečnu máme

$$\frac{x^2}{1+x^2} \sim 1.$$

Omezíme-li se opět na interval $J = (\delta, +\infty)$, je konstrukce integrovatelné majoranty snadná

$$\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{e}^{-bx} \leq \mathrm{e}^{-bx} \leq \mathrm{e}^{-\delta x},$$

a jako integrovatelnou majorantu tedy opět volíme $g(x) =_{\mathrm{def}} \mathrm{e}^{-\delta x}$. Zbývá ověřit poslední podmínku, tedy integrovatelnost $\frac{x}{1+x^2}\mathrm{e}^{-bx}$ pro alespoň jednu hodnotu $b \in (\delta, +\infty)$. To je ovšem snadné, funkce je spojitá, nezáporná a shora je omezená funkcí $\mathrm{e}^{-\delta x}$, což je integrovatelná funkce.

Zjistili jsme tedy, že platí

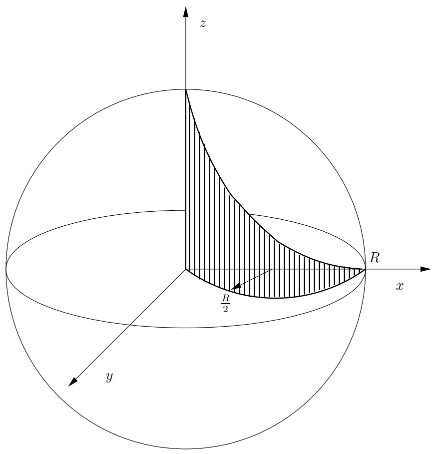
$$\forall b \in (\delta, +\infty) : -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{x\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

Jelikož δ je libovolné pevné reálné číslo, můžeme z předchozího usoudit, že dokonce platí

$$\forall b \in (0, +\infty) : -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{x\mathrm{e}^{-bx}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

(Pamatujte, že derivace je *lokální vlastnost.*) Formální manipulace z úvodu je tedy v pořádku.

[7] 4. Spočtěte plošný obsah plochy S, která je popsána jako část válcové plochy $x^2+y^2=xR$ ležící uvnitř koule $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ a v prvním oktantu ($x>0$, $y>0$, $z>0$), viz Obrázek 1. (Číslo $R \in \mathbb{R}^+$ je parametr.)



Obrázek 1: Plocha S.

Řešení:

Válcová plocha je dána rovnicí $x^2+y^2=xR$, což upravíme na

$$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2,$$

jedná se tedy o válcovou plochu se středem v bodě $x=\frac{R}{2}$ o poloměru $\frac{R}{2}$. Situace je znázorněna na Obrázku 1. Napíšeme parametrizaci plochy (válcové souřadnice se středem v bodě $x=\frac{R}{2}$)

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos\varphi, \\ y &= \frac{R}{2}\sin\varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

kde $\varphi \in [0,\pi]$ (vyžadujeme $x>0$, $y>0$). Parametr z ovšem není libovolný, musí být splněna podmínka $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ aneb

$$z^2 \leq R^2-(x^2+y^2)=R^2-\left(\frac{R^2}{4}+\frac{R^2}{2}\cos\varphi+\frac{R^2}{4}\cos^2\varphi+\frac{R^2}{4}\sin^2\varphi\right)=\frac{R^2}{2}(1-\cos\varphi)$$

odkud

$$z \in \left[0,\sqrt{\frac{R^2}{2}(1-\cos\varphi)}\right]=\left[0,R\sin\frac{\varphi}{2}\right].$$

Hledaná parametrizace plochy tedy je

$$\Phi(\varphi,z)=\begin{cases} x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos\varphi, \\ y=\frac{R}{2}\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases}$$

kde $z \in \left[0,R\sin\frac{\varphi}{2}\right]$ a $\varphi \in [0,\pi]$.

Spočteme element plochy

$$\mathrm{d}S=\sqrt{g}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z,$$

kde

$$g=\det\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\bullet\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\bullet\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi}\bullet\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi}\bullet\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} \end{bmatrix}.$$

Je tedy $\mathrm{d}S=R^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi$, zbývá zintegrovat přes danou plochu

$$\int_S \mathrm{d}S=\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{z=0}^{R\sin\frac{\varphi}{2}}\frac{R}{2}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi=\frac{R}{2}\int_{\varphi=0}^{\pi}R\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi=\frac{R^2}{2}\left[-2\cos\frac{\varphi}{2}\right]_{\varphi=0}^{\pi}=R^2.$$

Plošný obsah plochy S je tedy R^2.

Je možné použít i válcové souřadnice se středem v počátku. Válcovou plochu tedy popíšeme pomocí

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi,\\
y &= r\sin\varphi,\\
z &= z,
\end{aligned}
$$

ze vztahu $x^2+y^2 = xR$ pak plyne, že

$$r^2 = rR\cos\varphi,$$

aneb

$$r = R\cos\varphi.$$

Proměnná φ je nyní z rozmezí $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, rozmezí hodnot pro proměnnou z dostaneme z podmínky $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, aneb

$$z^2 = R^2 - (x^2+y^2) = R^2 - r^2 = R^2(1-\cos^2\varphi) = R^2\sin^2\varphi.$$

Celkem tedy

$$\Phi(\varphi, z) = \begin{cases} x = R\cos^2\varphi,\\ y = R\cos\varphi\sin\varphi,\\ z = z,\end{cases}$$

kde $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $z \in [0, R\sin\varphi]$.

Spočteme element plochy

$$\mathrm{d}S = \sqrt{g}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z,$$

kde

$$g = \det\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\bullet\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\bullet\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi}\\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi}\bullet\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi}\bullet\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi}\end{bmatrix}.$$

Tečné vektory jsou

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix}-2R\cos\varphi\sin\varphi\\ -R\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-R\sin 2\varphi\\ -R\cos 2\varphi\\ 0\end{bmatrix},$$

a proto

$$g = \det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & R^2\end{bmatrix}.$$

Je tedy $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi$, zbývá zintegrovat přes danou plochu

$$\int_S \mathrm{d}S = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{z=0}^{R\sin\varphi} R\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = R\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = R^2\left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = R^2,$$

což se kupodivu shoduje s výsledkem zíkaným výpočtem s užitím původní parametrizace.

[7] 5. Uvažujte funkci $f(x) = \cos x$ na intervalu $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$.

a) Dodefinujte funkci f na $\mathbb{R}$ tak, abyste ji mohli rozvinout do *sinové* Fourierovy řady. Načrtněte graf rozšířené funkce f.

b) Najděte Fourierovu řadu takto rozšířené funkce f.

c) Diskutujte konvergenci nalezené Fourierovy řady. Určete zda Fourierova řada konverguje k funkci f ve smyslu konvergence v L^2, ve smyslu bodové konvergence a ve smyslu stejnoměrné konvergence.

d) Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f.

Řešení:

Funkci rozšíříme tak, aby byla lichá, je tedy

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in (0, \pi), \\ -\cos x & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Spočteme Fourierovy koeficienty a_k, b_k, abychom mohli funkci f rozvinout do Fourierovy řady

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Kosinové koeficienty jsou nulové, sinové koeficienty spočteme podle vzorce

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \mathrm{d}x.$$

Je tedy (využíváme vzorce $\cos x \sin y = \frac{1}{2} (\sin(x + y) - \sin(x - y))$, ve výpočtu samozřejmě předpokládáme, že $k \neq 1$)

$$\begin{aligned}
\pi b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \,\mathrm{d}x &= -\int_{-\pi}^{0} \cos x \sin kx \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \cos x \sin kx \,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_{0}^{\pi} \cos x \sin kx \,\mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin((k+1)x) - \sin((1-k)x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi} \sin((k+1)x) \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \sin((k-1)x) \,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1}\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{\cos(k-1)x}{k-1}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{1}{k+1} + \frac{(-1)^k}{k-1} + \frac{1}{k-1} = \begin{cases} 0, & k = 2l - 1, l \in \mathbb{N}, \\ \frac{4k}{k^2-1}, & k = 2l, l \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Integrál pro $k = 1$ je nulový, což je vidět na první pohled. Celkem tudíž

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{l}{4l^2 - 1} \sin 2lx.$$

Funkce f je po částech spojitě diferencovatelná a má na jednotlivých intervalech omezenou derivaci, a splňuje proto předpoklady kritéria pro konvergenci Fourierových řad, které říká:

Buď $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a buď funkce f dále po částech spojitá a spojitě diferencovatelná na $\mathbb{R}$, potom platí

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \to +\infty} s_n(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\xi \to x+} f(\xi) + \lim_{\xi \to x-} f(\xi) \right)$$

Je-li navíc $I \subset (a, b)$ uzavřený interval a $f \in \mathcal{C}([a, b])$, pak

$$s_n \overset{I}{\rightrightarrows} f.$$

Je tedy

$$\forall I \subset (0,\pi),\ \overline{I} = I:\ s_n \overset{I}{\rightrightarrows} f$$

(aneb pro libovolný uzavřený podinterval intervalu $(0,\pi)$ je konvergence Fourierovy řady stejnoměrná, tvrzení samozřejmě platí i pokud se zajímáme o interval posunutý o $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) a kromě toho

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\xi\to 0+} f(\xi) + \lim_{\xi\to 0-} f(\xi)\right) = 0.$$

Funkce je zřejmě v $L^2((-\pi,\pi))$ a splňuje tedy předpoklady Carlesonovy věty o skoro všude konvergenci, která říká:

Buď $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a buď $f \in L^p((a, a+2\pi))$, $p \in (1,+\infty)$, pak platí

$$s_n \overset{L^p}{\to} f,$$
$$s_n(x) \to f(x) \text{ skoro všude.}$$

Což už ale stejně víme z předchozího.

Parsevalova rovnost říká, že norma funkce f v prostoru $L^2(-\pi,\pi)$ je rovná normě posloupnosti Fourierových koeficientů v prostoru ℓ^2 (předpokládá se rozklad vůči ortonormální bázi)

$$\|f\|^2_{L^2} = \|c_k\|^2_{\ell^2},$$

v našem případě tedy (koeficient $\frac{1}{\pi}$ se zde objevuje proto, že báze $\sin kx$, $\cos kx$ není ortonormální)

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2_{L^2} = \|b_k\|^2_{\ell^2},$$

kde

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2_{L^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x|^2 dx = \frac{1}{\pi}\pi = 1,$$
$$\|b_k\|^2_{\ell^2} = \sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{8}{\pi}\frac{l}{4l^2-1}\right)^2.$$

Obdrželi jsme tedy rovnost

$$\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{8}{\pi}\frac{l}{4l^2-1}\right)^2 = 1.$$