Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 1

Číselné řady s nezápornými členy

Použitím kritérií pro konvergenci řad s nezápornými členy rozhodněte o konvergenci či divergenci následujících řad. Pokud řada obsahuje parametry, proveďte vzhledem k nim diskuzi.

1.
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Řešení: Chceme ukázat, že $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \in [n_0, +\infty)$ platí
$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}.$$

Použitím srovnávacího kritéria potom dostaneme konvergenci zadané řady, neboť řada $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje. (Konvergence řady nezávisí na chování konečného počtu členů – nemusíme se tedy zabývat prvními $n_0 - 1$ členy.) Protože platí následující řetězec ekvivalencí
$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2} \iff \mathrm{e}^{\ln n \ln(\ln n)} > \mathrm{e}^{2\ln n} \iff \ln n \ln(\ln n) > 2\ln n \iff n > \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2} \approx 1618.178,$$

stačí volit $n_0 = 1619$.

2.
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$$

Řešení: Chceme ukázat, že $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \in [n_0, +\infty)$ platí
$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} > \frac{1}{n}.$$

Použitím srovnávacího kritéria potom dostaneme divergenci zadané řady, neboť řada $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverguje. (Divergence řady nezávisí na chování konečného počtu členů – nemusíme se tedy zabývat prvními $n_0 - 1$ členy.) Platí následující řetězec ekvivalencí (v poslední ekvivalenci využíváme $n \geq 3$)
$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} > \frac{1}{n} \iff \mathrm{e}^{(\ln \ln n)^2} < n \iff (\ln \ln n)^2 < \ln n \iff \ln \ln n < \sqrt{\ln n}.$$

Poslední nerovnost už ale platí pro všechna $n \geq 3$ (a za n_0 výše lze tedy brát první člen $n_0 = 3$), neboť
$$\ln x < \sqrt{x}, \quad \forall x > 0.$$

Skutečně, derivace funkce $f(x) := \sqrt{x} - \ln x$ vychází
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x},$$

a snadno se ověří, že funkce f má tedy v bodě $x = 4$ globální minimum. Navíc $f(4) = 2 - \ln 2 > 0$, a tedy $f(x) > 0$ pro $x > 0$.

3.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^{n^\alpha} - 1\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Řešení: Označme si
$$a_n := n^{n^\alpha} - 1 = \mathrm{e}^{n^\alpha \ln n} - 1.$$

Zřejmě, pro $\alpha \geq 0$ je $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, a není tak splněna nutná podmínka konvergence číselných řad. Naopak, pro $\alpha < 0$ je nutná podmínka splněna, neboť

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n^\alpha \ln n} - 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{n^\alpha \ln n} - 1}{n^\alpha \ln n} \cdot n^\alpha \ln n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{n^\alpha \ln n} - 1}{n^\alpha \ln n} \cdot \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \ln n = 1 \cdot 0 = 0,$$

kde jsme využili toho, že pro $\alpha < 0$ platí

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \ln n = 0,$$

což plyne z Heineho věty a použití l'Hôspitalova pravidla pro výpočet limity funkce typu „$\frac{\text{něco}}{\infty}$"

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}} = 0.$$

V dalším tedy uvažujeme pouze $\alpha < 0$. Označme si

$$b_n := n^\alpha \ln n.$$

Víme, že
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{n^\alpha \ln n} - 1}{n^\alpha \ln n} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

Můžeme tedy použít limitní srovnávací kritérium a tudíž stačí vyzkoumat, pro která $\alpha < 0$, konverguje/diverguje řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Na vyšetření konvergence/divergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ použijeme Cauchyho integrální kritérium. Předpoklady příslušné věty vyžadují, aby existovalo $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) := x^\alpha \ln x$ je nerostoucí funkce na intervalu $(x_0, +\infty)$. Protože
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = x^{\alpha-1}(\alpha \ln x + 1),$$

vidíme, že lze volit $x_0 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}}$, neboť $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ je potom na $(x_0, +\infty)$ záporná a tedy funkce f je na příslušném intervalu klesající.

Pro $\alpha \in (-\infty, 0) \setminus \{-1\}$ máme

$$\int x^\alpha \ln x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & v = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\ u' = \dfrac{1}{x} & v' = x^\alpha \end{vmatrix} = \frac{x^{\alpha+1} \ln x}{\alpha+1} - \int \frac{x^\alpha}{\alpha+1} \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1} \ln x}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + c,$$

a tedy $\int_{x_0}^{+\infty} x^\alpha \ln x \,\mathrm{d}x$ pro $\alpha \in (-\infty, -1)$ konverguje a pro $\alpha \in (-1, 0)$ diverguje. (Limitu primitivní funkce v $+\infty$ spočítáme pomocí l'Hôspitalova pravidla podobně jako výše.) Pro $\alpha = 1$ máme

$$\int \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int t \,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2} \ln^2 x + c,$$

a tedy $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$ diverguje.

Podle Cauchyho integrálního kritéria tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje pro $\alpha \in (-\infty, -1)$ a diverguje pro $\alpha \in [-1, 0)$. Stejný výsledek pak dostaneme i pro původní řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle limitního srovnávacího kritéria.

Závěr: řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^{n^\alpha} - 1\right)$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

4.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

Řešení: Označme si
$$a_n := \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$
Platí
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}.$$
Limitní podílové kritérium potom dává konvergenci zadané řady, neboť
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$
Poslední limita je opravdu rovna nule, neboť exponenciální funkce roste rychleji, než polynom v čitateli. Pokud bychom chtěli být pečliví, výsledek dostaneme dvojnásobným použitím l'Hôspitalova pravidla pro výpočet limity typu "$\frac{\text{něco}}{\infty}$"
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{2^{2x+1}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x+1)}{2^{2x+2}\ln 2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2^{2x+3}\ln^2 2} = 0,$$
a následnou aplikací Heineho věty.

5.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Řešení: Označme n-tý člen řady
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n})^n}$$
jako $a_n := \frac{n^2}{(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n})^n}$. Jedná se o řadu s kladnými prvky a můžeme použít limitní odmocninové kritérium. Platí
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{2}{n}}}{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{2\ln n}{n}}}{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{2\ln n}{n}}}{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{2\ln n}{n}}}{\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n})}.$$
Limita ve jmenovateli je evidentně $\frac{\pi}{3}$ a zbývá tedy určit limitu v čitateli. Z l'Hôspitalova pravidla plyne
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 0.$$
Z Heineho věty pak máme
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln n}{n} = 0$$
a použitím věty o limitě složené funkce dostaneme
$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$
Vidíme tedy, že
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi} < 1.$$
Z limitního odmocninového kritéria okamžitě dostáváme, že řada konverguje.

6.
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln\ln n)^q}, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Řešení: K určení konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q},\ p,q \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

nejprve uvažme speciální případ $q = 0$. Je-li $p \leq 0$, pak platí

$$\frac{1}{n(\ln n)^p} \geq \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, pak i řada (1) má součet $+\infty$. Nyní můžeme předpokládat, že $p > 0$. Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p},\ x \in (3, +\infty).$$

Ta je klesající, neboť je součinem dvou kladných klesajících funkcí (případně se o tom můžeme přesvědčit ze znaménka f'). Dále víme, že integrál

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dy}{y^p}, \quad y = \ln x,$$

konverguje právě tehdy, když $p > 1$. Z integrálního kritéria tedy plyne, že (1) konverguje pro $p > 1, q = 0$ a diverguje pro $q = 0$ a $0 < p \leq 1$. Pro $q = 0$ tedy řada konveguje právě tehdy, když $p > 1$.

Nyní můžeme probrat obecný případ. Všimněme si, že pro $\varepsilon, s \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^\varepsilon (\ln\ln x)^s = \lim_{y\to+\infty} y^\varepsilon (\ln y)^s = \begin{cases} +\infty, & \varepsilon > 0, \\ 0, & \varepsilon < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ve (2) jsme v první rovnosti použili větu o limitě složené funkce pro substituci $y = \ln x$ a druhá rovnost se dokáže jako v příkladě 3. Speciálně tato limita vůbec nezávisí na s pro $\varepsilon \neq 0$.

Je-li nyní $p < 1$, pak zvolne $\varepsilon > 0$ tak, aby i $p + \varepsilon < 1$. Pak z (2) plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí odhad:

$$\frac{(\ln n)^\varepsilon}{(\ln\ln n)^q} \geq 1.$$

Tudíž

$$\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q} = \frac{1}{n(\ln n)^{p+\varepsilon}} \frac{(\ln n)^\varepsilon}{(\ln\ln n)^q} \geq \frac{1}{n(\ln n)^{p+\varepsilon}}.$$

Jelikož jsme již ukázali

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{p+\varepsilon}} = +\infty,$$

pak ze srovnávacího kritéria pro řady plyne, že i (1) diverguje pro $p < 1$ a q libovolné.

Je-li nyní naopak $p > 1$, pak zvolne $\varepsilon > 0$ tak, aby i $p - \varepsilon > 1$. Pak z (2) plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí odhady:

$$\frac{(\ln n)^{-\varepsilon}}{(\ln\ln n)^q} \leq 1$$

a

$$\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q} = \frac{1}{n(\ln n)^{p-\varepsilon}} \frac{(\ln n)^{-\varepsilon}}{(\ln\ln n)^q} \leq \frac{1}{n(\ln n)^{p-\varepsilon}}.$$

Jelikož jsme již dříve ukázali, že

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{p-\varepsilon}} < +\infty,$$

pak ze srovnávacího kritéria pro řady plyne, že i (1) konverguje pro $p > 1$ a q libovolné.

Nyní zbývá případ $p = 1$ a $q \in \mathbb{R}$. Je-li $q \leq 0$, pak platí odhad

$$\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^q} \geq \frac{1}{n\ln n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Vidíme, že pro $p = 1$ a $q \leq 0$ řada (1) diveruje. Můžeme tedy předpokládat, že $q > 0$. Pak funkce

$$g(x) = \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^q}, \ x \in (3, +\infty).$$

je zjevně klesají (ze stejného důvodu jako funkce f). Platí

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dy}{y (\ln y)^q}$$

a už víme, že tento integrál konverguje právě tehdy, když $q > 1$.

Závěr: řada (1) konverguje právě tehdy, když $p > 1$ nebo $p = 1, \ q > 1$.

7.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^p, \quad p \in \mathbb{R}$$

Řešení: Položme

$$a_n := \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^p, \ p \in \mathbb{R}.$$

Dále

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) &= \lim_{n \to +\infty} n \left(1 - \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p \right) \\
&= \lim_{n \to +\infty} n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n+2} \right)^p \right) \\
&= \lim_{n \to +\infty} n \left(1 - \left(1 - \frac{p}{2n+2} + O\left((\frac{1}{2n+2})^2 \right) \right) \right) \\
&= \lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{p}{2n+2} + O\left((\frac{1}{2n+2})^2 \right) \right) = \frac{p}{2}.
\end{aligned}$$

Z Raabeho kritéria plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{3}$$

konverguje pro $p > 2$ a diverguje pro $p < 2$. Je-li $p = 2$, pak

$$a_{n+1} = (1 - \frac{1}{2n+2})^2 a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(2n+2)^2}\right) a_n > (1 - \frac{1}{n+1}) a_n = \frac{n}{n+1} a_n.$$

Indukcí dle n dostáváme

$$a_{n+1} > \frac{n}{n+1} a_n > \frac{n-1}{n+1} a_{n-2} > \cdots > \frac{1}{n+1} a_1 = \frac{1}{4(n+1)}.$$

Tudíž součet řady (3) je zdola odhadnut součtem řady $\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Tudíž (3) diverguje pro $p = 2$.