Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

[8] 1.
- Zformulujte přesně Darbouxovu větu o nabývání mezihodnot.
- Uvažujte funkci g spojitou na $\langle 0,1\rangle$ takovou, že $g[\langle 0,1\rangle] \subset [0,1]$ neboli $g := \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$.
  $--$ Ukažte, že g má na $\langle 0,1\rangle$ pevný bod, tj. existuje $x \in \langle 0,1\rangle$ tak, že $g(x) = x$.
  $--$ Nakreslete obrázek charakterizující situaci.
  $--$ *Návod: zkoumejte vlastnosti funkce $f(x) := x - g(x)$ a zkuste použít Darbouxovu větu.*
- Darbouxovu větu dokažte (stačí uvést hlavní kroky důkazu).

[8] 2. Buď f a g dvě reálné funkce definované v (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

- Pro $x \in (a, b)$, zadefinujte pojem: $f'(x)$ existuje a je vlastní.
- Zformulujte a dokažte větu o derivování součinu $(fg)'$ v bodě x. Zformulujte také všechna tvrzení, která v důkazu využíváte (bez důkazu).

Dále,

- zadefinujte pojmy: F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b).
- zformulujte a dokažte větu o integraci *per partes*.

[8] 3. Nechť je reálná funkce f definována na (a, b) a nechť $c \in (a, b)$. Uveďte přesně definice pojmů:

- f je rostoucí na intervalu (a, c).
- f je konvexní na intervalu (a, c).

Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (tj. buď výrok dokažte, nebo uveďte protipříklad):

1. f je rostoucí na (a, c), f rostoucí na (c, b) $\implies$ f rostoucí na (a, b);
2. f je rostoucí na (a, c), f rostoucí na (c, b) a f je spojitá v bodě c $\implies$ f rostoucí na (a, b);
3. f je konvexní na (a, c), f konvexní na (c, b) $\implies$ f konvexní na (a, b);
4. f je konvexní na (a, c), f konvexní na (c, b) a f je spojitá v bodě c $\implies$ f konvexní na (a, b);

Nechť $f''(x)$ existuje pro všechna $x \in (a, c)$. Doplňte tvrzení v následujících implikacích a první implikaci dokažte:

- Je-li f rostoucí na intervalu (a, c), pak pro každé $x \in (a, c)$: $f'(x) \ldots$.
- Je-li f konvexní na intervalu (a, c), pak pro každé $x \in (a, c)$: $f''(x) \ldots$.