6.3 Greenova funkce

Fundamentální řešení generují řešení $Lu=f$ v $\mathbb{R}^d$ konvolucí s f. Nesplňují však pro $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ okrajové podmínky. Tento nedostatek pojmu odstraníme → dostaneme se tak k pojmu Greenova funkce.

Začneme pomocným, ale důležitým tvrzením o reprezentaci hladkých funkcí v omezených oblastech, někdy nazývané „věta o třech potenciálech".

Tvrzení (Věta o třech potenciálech) • Buď $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ otevřená, omezená s hranicí $\partial\Omega$, na kterou lze použít Gaussovu větu / integraci per partes pro funkce více proměnných).

- Buď $u\in C^2(\Omega)$.
- Nechť Φ značí fundamentální řešení Poissonovy rce, tj.

$$\Phi(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x| & d=2\\ \frac{1}{d(d-2)\alpha(d)}\frac{1}{|x|^{d-2}} & d\geq 3.\end{cases}$$

Pak

$$(*)\qquad u(x) = -\int_\Omega \Phi(y-x)\,\Delta u(y)\,dy - \int_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,\Phi(y-x)\right)dS_y$$

Dk. Připomeňme, že $\tilde\Phi(y):=\Phi(y-x)$ má singularitu v $y=x$ a v ostatních bodech splňuje $\Delta\tilde\Phi=0$. Uvažujme tedy $\Omega\setminus B_\varepsilon(x)$ místo Ω a pracujme s ideou, že v závěru necháme $\varepsilon\to 0+$. Tedy

$$-\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)}\Phi(y-x)\,\Delta u(y)\,dy \overset{\text{per partes}}{=} \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)}\nabla_y\Phi(y-x)\cdot\nabla u(y)\,dy - \int_{\partial\Omega\setminus\partial B_\varepsilon(x)}\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,dS_y$$

(srovnej s 1. integrálem na pravé straně $(*)$)

$$\overset{\text{per partes}}{=} -\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x)}\underbrace{\Delta_y\Phi(y-x)}_{=0}\,u(y)\,dy + \int_{\partial\Omega\setminus\partial B_\varepsilon(x)}\left\{u(y)\frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial\nu} - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\right\}dS_y$$

$$= \int_{\partial\Omega}\left\{u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\right\}dS_y - \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\left(u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\right)dS_y}$$

Vidíme, že vzorec $(*)$ bude dokázán pokud poslední integrál bude konvergovat k $u(x)$ pro $\varepsilon\to 0+$.

Důkaz

(i) $$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Phi(y-x)\underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)}_{\nabla u\cdot\nu}\, dS_y\right| \le \|\nabla u\|_{\infty, B_\varepsilon(x)\cap\Omega} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} |\Phi(y-x)|\, dS_y$$

$(u\in C^2(\Omega))$

$$\le C\, \underbrace{\|\nabla u\|_{\infty,B_\varepsilon(x)\cap\Omega}}_{<+\infty} \begin{cases} C\,\varepsilon\ln\varepsilon & \boxed{d=2}\\ C\,\varepsilon & \boxed{d\ge 3}\end{cases} \to 0 \text{ pro } \varepsilon\to 0+.$$

(ii) $$-\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial\nu}\, dS_y = -\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(y-x)\cdot\frac{y_i-x_i}{|y-x|}\, dS_y$$

přímý tvar $\Phi(y-x)$ $\longrightarrow$ $$= \frac{1}{d\,\alpha(d)}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{1}{|y-x|^{d-1}}\, dS_y = \frac{1}{d\,\alpha(d)\,\varepsilon^{d-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\, dS_y$$

$$= \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\, dS_y \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} u(x),$$

Zde jsme využili pomocný výpočet: $\underbrace{d\,|B_\varepsilon(x)|}_{d\,\varepsilon^d\alpha(d)} = \varepsilon\,|\partial B_\varepsilon(x)| \Rightarrow |\partial B_\varepsilon(x)| = d\,\alpha(d)\,\varepsilon^{d-1}$

Vzorec (*) je "téměř" ideální z pohledu reprezentace řešení. Řešíme-li totiž Dirichletovu úlohu

(D) $\boxed{-\Delta u = f \text{ v } \Omega, \quad u = u_D \text{ na } \partial\Omega}$

či Neumannovu úlohu

(N) $\boxed{-\Delta u = f \text{ v } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial\nu} = g \text{ na } \partial\Omega}$

pak dva z integrálů na pravé straně (*) jsou jasně specifikovány daty ($\{u_D, f\}$ či $\{g, f\}$) a fundamentálním řešením. Jak se však vypořádat s třetím integrálem?

Zde si pomůžeme pomocnou úlohou (opravcem/korektorem), kterou budeme schopni ve speciálních geometriích (koule, vnější koule, poloprostor) explicitně vyřešit a vzorec (*) pak vede k explicitním řešení Dirichletovy či Neumannovy či smíšené úlohy. Tento nástroj lze však využít i v komplikovaných geometriích k nalezení přibližných řešení na hraničních integrálech a k jejich diskretizaci, viz např. kniha Wolfgang Wendland, C. Hsiao: „Boundary integral equations."

Jak pomocná úloha vypadá?

▷ V případě Dirichletova problému (D) hledáme opravdu $\psi^x = \psi^x(y)$ jako řešení

(K$_D$) $\boxed{-\Delta\psi^x = 0 \text{ v } \Omega \,, \quad \psi^x(y) = \phi(x-y) \text{ pro } y\in\partial\Omega}$

Dvojnásobnou integrací per-partes dostaneme ($u \in C^2(\Omega)$):

$$\boxed{(**) \quad -\int_\Omega \psi^x(y)\,\Delta u(y)\,dy = -\int_{\partial\Omega} \underbrace{\psi^x(y)}_{=\,\Phi(y-x)} \frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,dS_y + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\psi^x}{\partial\nu}(y)\,u(y)\,dS_y}$$

Sečteme-li (*) a (**) dostaneme:

$$u(x) = -\int_\Omega \left(\Phi(y-x)-\psi^x(y)\right)\Delta u(y)\,dy - \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \frac{\partial\psi^x}{\partial\nu}(y)\right)u(y)\,dS_y$$

Zavedeme-li značení

$$\boxed{G(x,y) := \phi(y-x)-\psi^x(y)}$$

tzv. Greenova funkce (k Dirichletově úloze)

lze psát

$$\boxed{u(x) = \int_\Omega G(x,y)\underbrace{\left(-\Delta u(y)\right)}_{=\,f(y)}dy - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)\underbrace{u(y)}_{=\,u_D(y)}\,dS_y}$$

Všimněme si z definice G a ψ^x, že G řeší: $\boxed{\begin{array}{l} -\Delta G = \delta_x \text{ v } \Omega \\ G = 0 \text{ na } \partial\Omega \end{array}}$

▷ V případě Neumannovy úlohy (N) hledáme opravdu $\psi^x = \psi^x(y)$ jako řešení

(K$_N$) $\boxed{-\Delta\psi^x = 0 \text{ v } \Omega \,, \quad \frac{\partial\psi^x(y)}{\partial\nu} = \frac{\partial\phi(x-y)}{\partial\nu} \text{ v } \partial\Omega}$

Stejným postupem jako výše dostaneme (s využitím):

$$\boxed{u(x) = \int_\Omega G(x,y)\underbrace{\left(-\Delta u(y)\right)}_{=\,f(y)}dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\underbrace{\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)}_{=\,g(y)}\,dS_y}$$

přičemž G nyní řeší: $\boxed{\begin{array}{l} -\Delta G = \delta_x \text{ v } \Omega \\ \dfrac{\partial G}{\partial\nu} = 0 \text{ na } \partial\Omega \end{array}}$

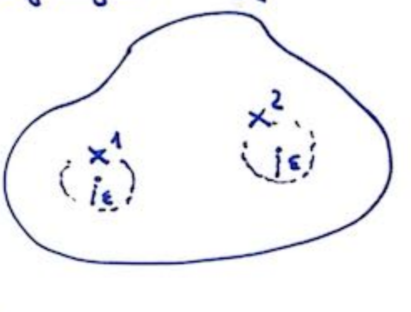
Pozorování: protože ψ^x je u obou úloh harmonické, víme mimojiné, že $\psi^x \in C^\infty(\Omega)$, ...

Ještě než se začneme zabývat otázkou konstrukce Greenových funkcí, ukážeme si, že G je vzhledem k x a y symetrická.

Tvrzení Platí:

$$G(x^1, x^2) = G(x^1, x^2) \qquad \forall\, x^1, x^2 \in \Omega \quad (x^1 \neq x^2)$$

(Dk) Buď $x^1 \neq x^2$, $x^1, x^2 \in \Omega$ libovolné, ale pevné. Definujme:



pro x^1: $\quad v : z \longmapsto G(x^1, z) = v(z)$

pro x^2: $\quad w : z \longmapsto G(x^2, z) = w(z)$

Dle konstrukce G víme, že

$$-\Delta v = \delta_{x^1} \ \text{v} \ \Omega, \quad v = 0 \ \text{na} \ \partial\Omega$$

$$-\Delta w = \delta_{x^2} \ \text{v} \ \Omega, \quad w = 0 \ \text{na} \ \partial\Omega$$

Pro $\varepsilon > 0$ takové, že $B_\varepsilon(x^1) \cap B_\varepsilon(x^2) = \emptyset$, $B_\varepsilon(x^i) \subset \Omega$, $i = 1, 2$, dostáváme:

$$\underset{-\Delta v = 0 \text{ v}}{0 \ =} \int_{\Omega \setminus (B_\varepsilon(x^1) \cup B_\varepsilon(x^2))} -\Delta v \, w \, dx \overset{2\times \text{ per partes}}{=} \int_{\Omega \setminus (B_\varepsilon(x^1) \cup B_\varepsilon(x^2))} v \overset{0}{(-\Delta w)} \, dx + \int_{\partial (B_\varepsilon(x^1) \cup B_\varepsilon(x^2))} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} w - v \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) dS_y$$

kde jsme využili, že $v = w = 0$ na $\partial\Omega$

Odsud

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x^1)} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} w - v \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) dS_y = \int_{\partial B_\varepsilon(x^2)} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} w \right) dS_y$$

Víme: $\quad w \in C^\infty(B_\varepsilon(x^1))$ $\quad$ a také $\quad v \in C^\infty(B_\varepsilon(x^2))$

$\psi^{x^1}, \psi^{x^2} \in C^\infty(B_\varepsilon(x^1))$ $\qquad$ $\psi^{x^1}, \psi^{x^2} \in C^\infty(B_\varepsilon(x^2))$

tedy o chování těchto integrálů rozhodují $\Phi(x^1 - y)$ a $\Phi(x^2 - y)$. Postupem stejným jako v důkazu Tvrzení „o třech potenciálech" dostáváme (pokud $\varepsilon \to 0+$):

$$w(x^1) = v(x^2)$$

tzn.

$$\underline{G(x^2, x^1) = G(x^1, x^2)}$$

∎