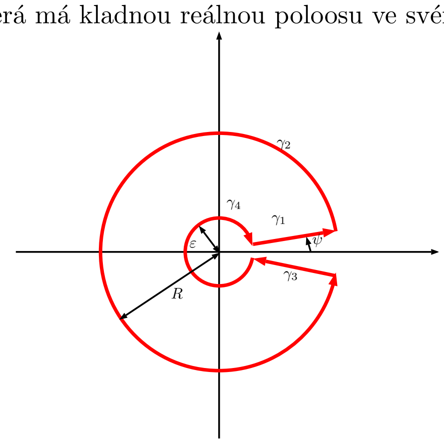
Termín pro odevzdání: čtvrtek 15. dubna 2021

1. Využitím vhodné reálné substituce, převedením na křivkový integrál v komplexní rovině a s využitím reziduové věty vypočítejte integrál

$$I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\mathrm{d}x, \quad -1 < p < 2.$$

Nápověda (možné kroky):

1. Zvolte vhodnou reálnou substituci.
2. Přejděte ke komplexní proměnné, najděte a charakterizujte singularity získané funkce.
3. Pro integraci využijte křivku, která má kladnou reálnou poloosu ve svém vnějšku.



4. S použitím reziduové věty vypočtěte integrál I. Všechny kroky zdůvodněte.
5. Nezapomeňte diskutovat speciální hodnoty parametru p.

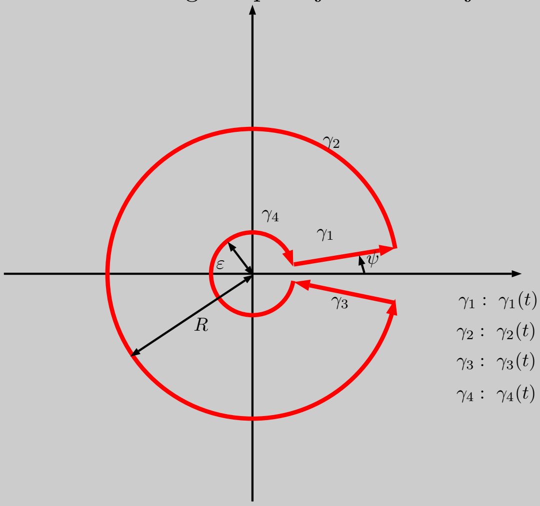
Řešení:
Přepišme si integrál do tvaru $I = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{x}\right)^p \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$, který napoví vhodnou substituci $y = \frac{1-x}{x}$. Pro tuto substituci můžeme dále psát $x = \frac{1}{1+y}$, $1+x^2 = \frac{y^2+2y+2}{(1+y)^2} = \frac{(y+1)^2+1}{(1+y)^2}$ a $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2}$. Pro hledaný integrál tedy platí

$$I = -\int_\infty^0 \frac{y^p}{(1+y)((1+y)^2+1)}\mathrm{d}y = \int_0^\infty \frac{y^p}{(1+y)((1+y)^2+1)}\mathrm{d}y.$$

Přejdeme ke komplexní proměnné

$$z^p f(z) = \frac{z^p}{(1+z)((1+z)^2+1)}\mathrm{d}z = \frac{z^p}{(1+z)((1+z)+i)((1+z)-i)}\mathrm{d}z.$$

Funkce $f(z)$ má tři jednoduché póly $z_1 = -1$, $z_2 = -1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$ a $z_3 = -1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$. Všechny tyto póly tedy leží uvnitř křivky (pro dostatečně malé ε a dostatečně velké R) a mimo kladnou reálnou osu. Problematickému bodu $z = 0$ se vyhneme. K nalezení integrálu použijeme následující křivku, parametrizaci křivky:



$\gamma_1: \ \gamma_1(t) = te^{i\psi}, \ t \in [\epsilon, R]$

$\gamma_2: \ \gamma_2(t) = Re^{it}, \ t \in [\psi, 2\pi - \psi]$

$\gamma_3: \ \gamma_3(t) = te^{i(2\pi-\psi)}, \ t \in [R, \epsilon]$

$\gamma_4: \ \gamma_4(t) = \varepsilon e^{it}, \ t \in [2\pi - \psi, \psi]$

Pro logaritmus volíme větev logaritmu $(0, 2\pi)$ (logaritmus holomorfní uvnitř křivky, argument logaritmu dodefinovaný jednostrannou limitou).

Za použití reziduové věty dostáváme

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{3} Res_{z_j}\left(z^p f(z)\right)$$

Nyní musíme jednotlivé členy vyčíslit, pro jednotlivé části můžeme psát:

- $I_1 = \int_{\gamma_1} z^p f(z)\mathrm{d}z$, kde $\gamma_1(t) = te^{i\psi},\ t \in [\epsilon, R]$ a ψ dostatečně malé, integrand spojitý a tedy

$$\int_\epsilon^R \frac{(te^{i\psi})^p}{(1+te^{i\psi})((1+te^{i\psi})^2+1)}(te^{i\psi})'\mathrm{d}t \xrightarrow{\psi\to 0^+} \int_\epsilon^R \frac{t^p}{(1+t)((1+t)^2+1)}\mathrm{d}t$$
$$\xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\infty \frac{t^p}{(1+t)((1+t)^2+1)}\mathrm{d}t = I$$

- Analogicky pro γ_3: $I_3 = \int_{\gamma_3} z^p f(z)\mathrm{d}z$, kde $\gamma_3(t) = te^{i(2\pi-\psi)},\ t \in [R, \epsilon]$ a tedy:

$$\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_R^\epsilon \frac{(te^{i(2\pi-\psi)})^p}{(1+te^{i(2\pi-\psi)})((1+te^{i(2\pi-\psi)})^2+1)}(te^{i(2\pi-\psi)})'\mathrm{d}t \xrightarrow{\psi\to 0^+} -\int_\epsilon^R \frac{t^p e^{i2\pi(p+1)}}{(1+t)((1+t)^2+1)}dt$$
$$\xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon\to 0^+} -e^{i2\pi(p+1)}\int_0^\infty \frac{t^p}{(1+t)((1+t)^2+1)}\mathrm{d}t = -e^{i2\pi(p+1)}I = -e^{i2\pi p}I.$$

- I_2 můžeme pro dostatečně velká R a pomocí tvrzení z přednášky odhadnout jako

$$\left|\int_{\gamma_2} z^p f(z)\mathrm{d}z\right| \le 2\pi R\frac{R^p}{(R-1)(R^2-2R-2)} = \frac{R^{p-2}}{(1/R-1)(1-2/R-2/R^2)} \xrightarrow[p<2]{R\to\infty} 0$$

- Pro I_4 podobně, uvědomíme si, že $f(z)$ je na okolí 0 holomorfní a tedy omezená, můžeme pokračovat

$$\left|\int_{\gamma_4} z^p f(z)\mathrm{d}z\right| \le 2\pi\varepsilon\varepsilon^p C = 2\pi C\varepsilon^{p+1} \xrightarrow[p>-1]{\varepsilon\to 0^+} 0$$

Celkově dostáváme $(1-e^{i2\pi p})I = 2\pi i\sum_{j=1}^3 Res_{z_i}\left(z^p f(z)\right)$ pro $-1 < p < 2$ a pro $p \notin \{0,1\}$ (pro tyto hodnoty je výraz $(1-e^{i2p\pi})$ roven nule).

Zbývají tedy dopočítat tři rezidua pro jednoduché póly

- $Res_{z_1=-1} = \left(\frac{z^p}{(z+1)^2+1}\right)\Big|_{z=-1}\left(\frac{1}{(1+z)'}\right)\Big|_{z=-1} = (-1)^p = e^{ip\pi}$
- $Res_{z_2=-1+i} = \left(\frac{z^p}{z+1}\right)\Big|_{z=-1+i}\left(\frac{1}{((1+z)^2+1)'}\right)\Big|_{z=-1+i} = \frac{(\sqrt{2}e^{i\pi\frac{3}{4}})^p}{2i^2} = -2^{\frac{p}{2}-1}e^{ip\pi\frac{3}{4}}$
- $Res_{z_3=-1-i} = \left(\frac{z^p}{z+1}\right)\Big|_{z=-1-i}\left(\frac{1}{((1+z)^2+1)'}\right)\Big|_{z=-1-i} = \frac{(\sqrt{2}e^{i\pi\frac{3}{4}})^p}{2i^2} = \frac{(\sqrt{2}e^{i\pi\frac{5}{4}})^p}{2i^2} = -2^{\frac{p}{2}-1}e^{ip\pi\frac{5}{4}}$
- celkově $\sum_{j=1}^3 Res_{z_i} z^p f(z) = e^{ip\pi} - 2^{\frac{p}{2}-1}\left(e^{i\pi\frac{3}{4}} + e^{i\pi\frac{5}{4}}\right) = e^{ip\pi}\left(1 - 2^{\frac{p}{2}}\left(\frac{-e^{i\pi\frac{p}{4}}+e^{i\pi\frac{p}{4}}}{2}\right)\right) = e^{ip\pi}\left(1-2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Vrátíme-li se k reziduové větě dostáváme $(1-e^{i2\pi p})I = 2\pi i e^{ip\pi}\left(1-2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)\right)$ a tedy

$$I = i2\pi\frac{e^{ip\pi}}{e^{ip\pi}(e^{-ip\pi}-e^{ip\pi})}\left(1-2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{\sin\pi p}\left(1-2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \text{pro } -1<p<2 \text{ a } p\neq 0,1$$

Případy pro $p=0$ a $p=1$ ošetříme speciálně

- $p=0$ a tedy $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$
- $p=1$ a tedy $\int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = [\arctan x]_0^1 - \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$