3 LIMITY PODRUHÉ (nikoliv však naposled)

3.1 Limity nevlastní, limity v nevlastních bodech, limity posloupností

Definice Posloupnost (číselná) je jakékoliv zobrazení $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$. Diskrétní hodnoty $\varphi(n)$ nazýváme n-tý člen posloupnosti. Často zobrazení φ zapisujeme ve tvaru $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ či ještě častěji $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

U posloupností nás bude zajímat chování φ_n pro rostoucí n; ptáme se, zda existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n)$ a čemu se rovná.

Také se v této kapitole zaměříme na limity fcí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{C}^*$ nebo $A \in \mathbb{R}^*$, v situacích, kterým jsme se dosud vyhýbali. Jedná se o tyto případy:

- $\boxed{x_0 = +\infty}$ nebo $\boxed{x_0 = -\infty}$ (tj. LIMITY V NEVLASTNÍCH BODECH)
- $\boxed{A = \infty}$ je-li $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nebo $\boxed{A = +\infty} \vee \boxed{A = -\infty}$ je-li $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tj. NEVLASTNÍ LIMITY)

Popis všech výše uvedených limit lze získat z obecné definice limity zavedené v kapitole 1. Připomeňme si ji.

Def. Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$), $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ (nebo $\mathbb{C}^*$). Řekneme, že

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{\text{df.}}{\equiv} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in P_\delta(x_0) \cap D_f)(f(x) \in U_\varepsilon(A))$$

Připomeňme si také okolí $\pm\infty$ resp. ∞:

$$P_\delta(+\infty) = \left(\tfrac{1}{\delta}, +\infty\right), \quad P_\delta(-\infty) = \left(-\infty, -\tfrac{1}{\delta}\right)$$

$$U_\delta(\pm\infty) = P_\delta(\pm\infty), \quad P_\delta(\infty) = \left\{z \in \mathbb{C};\ |z| > \tfrac{1}{\delta}\right\}.$$

Teď již není těžké si zapsat v různých konkrétních případech několik ekvivalentních formulací. Zde jsou tři případy:

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A \in \mathbb{C} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x \in \left(-\infty, -\tfrac{1}{\delta}\right)\right) |f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$

$$\underset{M := \delta^{-1}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)\left(x < -M \Rightarrow |f(x) - A|_{\mathbb{C}} < \varepsilon\right)$$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in(\frac{1}{\delta},+\infty))(f(x)\in(\frac{1}{\varepsilon},+\infty))$

$$\underset{\substack{L:=\varepsilon^{-1}\\ M:=\delta^{-1}}}{\iff} (\forall L>0)(\exists M>0)\ (x>M \Rightarrow f(x)>L)$$

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ (n>\frac{1}{\delta} \Rightarrow a_n\in(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon}))$

$$\iff (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(n\geq n_0 \Rightarrow a_n\in(-\infty,-1/\varepsilon))$$

$$\underset{L:=\varepsilon^{-1}}{\iff} (\forall L>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(n\geq n_0 \Rightarrow a_n<-L)$$

$\boxed{\text{Věta 3.1}}$ (Jak limity v nevlastních bodech a nevlastní limity počítat?)

- Pro $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(x_0\in\mathbb{R}^*)$ platí:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0+$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0-$

- Pro $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ platí

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$

- Pro $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ platí:

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to0+} f\left(\frac{1}{y}\right)$ pokud $\lim\limits_{y\to0+} f\left(\frac{1}{y}\right)$ existuje

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to0-} f\left(\frac{1}{y}\right)$ –"– $\lim\limits_{y\to0-} f\left(\frac{1}{y}\right)$ existuje.

Dk $\boxed{\text{Ad (1)}}$ z definice

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff (\forall L>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ (f(x)>L)$$

$$\iff (\forall L>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\left(0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{L}\right)$$

$$\underset{\varepsilon=L^{-1}}{\iff} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\left(0<\frac{1}{f(x)}<\varepsilon\right)$$

$$\underset{\text{definice}}{\iff} \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0+.$$

$\boxed{\text{Podobně se dokáže (2).}}$

$\boxed{\text{Ad (3)}}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff (\forall L>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ |f(x)|_{\mathbb{C}}>L$$

$$\underset{\varepsilon=\frac{1}{L}}{\iff} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\left(0<\frac{1}{|f(x)|_{\mathbb{C}}}<\varepsilon\right)$$

$$\iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\left(0<\left|\frac{1}{f(x)}-0\right|_{\mathbb{C}}<\varepsilon\right)$$

$\boxed{\text{Ad (4)}}$ Předpokládáme, že existuje $\lim\limits_{y\to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right) = A \in \mathbb{C}^*$. To znamená:

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(0<y<\delta \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) \in U_\varepsilon(A)\right)$, což je ekvivalentní s

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(\frac{1}{y}>\frac{1}{\delta} \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) \in U_\varepsilon(A)\right)$ $\quad\underset{x=\frac{1}{y}}{\iff}$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(x>\frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)\right)$ $\quad\underset{M=\delta^{-1}}{\iff}$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists M>0)\left(x>M \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)\right)$ $\quad\iff$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A.$

Důkaz (5) si proveďte podobně sami. ☒

V dalším budeme zkoumat, které věty platné pro vlastní limity ve vlastních bodech zůstávají v platnosti i pro nevlastní limity v nevlastních bodech a posloupnosti. Přímočará zobecnění jsou ponechána posluchačům, aby si je dokázali.

$\boxed{\text{Věta 3.2}}$ Pokud $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existuje ($x_0 \in \mathbb{R}^*$), pak je jediná.

Dk: Sporem. Předpokládáme, že existují alespoň dvě limity $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^*$ resp. $\mathbb{C}^*$ a jsou různé.

- Kdyby existovaly dvě různé vlastní limity, pak dostáváme spor s Větou 1 (respektive jejím bezprostředním zobecněním zahrnujícím případy $x_0=+\infty$ nebo $x_0=-\infty$.)
- Když $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, pak zbývá vyloučit situaci, kdy $A_1\in\mathbb{C}$ a $A_2=\infty$.

  Protože $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_2 = \infty$, tak

  k $L := 2|A_1|+1$ $(\exists \delta_2>0)(\forall x\in P_{\delta_2}(x_0))$ $\boxed{|f(x)|_{\mathbb{C}} > 2|A_1|_{\mathbb{C}}+1}$.

  Protože $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_1 \in \mathbb{C}$, tak

  k $\varepsilon := |A_1|+1$ $(\exists \delta_1>0)(\forall x\in P_{\delta_1}(x_0))$ $|f(x)-A_1|_{\mathbb{C}} < |A_1|+1$

  Protože $|f(x)|_{\mathbb{C}} - |A_1|_{\mathbb{C}} < |f(x)-A_1|_{\mathbb{C}}$, tak pro $x\in P_{\delta_1}(x_0)\cap P_{\delta_2}(x_0)$

  platí $|f(x)| < 2|A_1|+1$, což je protiklad s nerovností výše; ↯.
- Když $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tak si sami podobně zdůvodněte, že nemohou nastat situace:
  - $A_1\in\mathbb{R}$, $A_2=+\infty$,
  - $A_1\in\mathbb{R}$, $A_2=-\infty$,
  - $A_1=-\infty$, $A_2=+\infty$. ☒

Věta 3.3 Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ (nebo $\mathbb{C}^*$), pak $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$.
($x_0 \in \mathbb{R}^*$)

Dk přenechám laskavému čtenáři. ☒

<u>Příklad</u> (který ukazuje, že opačná implikace neplatí)
Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} := \{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

Věta 3.4 Věta o limitě $\pm, \cdot, \div$ platí i v nevlastních bodech (HODNOTY JSOU VŠAK VLASTNÍ!).
Věta 9 a Věta 10 naopak platí nejen v nevlastních bodech, ale i pro nevlastní limity. ☒

Dk pouhým rozšířením. přímočaré

<u>Příklad</u> (který ukazuje, že Věta 3.4 o $\pm, \cdot, \div$ obecně neplatí, jsou-li $A, B \in \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$)

Buď $f(x) = x^n$ a $g(x) = -x^m$ a $h(x) = x^m$, $x_0 = +\infty$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Pozorujeme: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ a

dále:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)+g(x)] = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \boxed{n>m} \text{ neboť } x^n + (-x^m) = \underbrace{x^n}_{\downarrow +\infty}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{x^{n-m}}\right)}_{\downarrow 1} \\ 0 & \text{pro } \boxed{n=m} \\ -\infty & \text{pro } \boxed{n<m} \text{ neboť } \end{cases}$$

$$x^n + (-x^m) = -\underbrace{x^m}_{\downarrow -\infty}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{x^{m-n}}\right)}_{\downarrow 1}$$

a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-m} = +\infty & \text{pro } \boxed{n>m} \\ = 1 & \text{pro } \boxed{n=m} \\ \lim \frac{1}{x^{m-n}} = 0+ & \text{pro } \boxed{n<m} \end{cases}$$

Tyto příklady dokládají, že obecně nelze dát smysl výrazům typu $+\infty + (-\infty)$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $0\cdot(-\infty)$, $\frac{0}{0}$, atd.

Následující věty tak obsahují podmínky, které zaručují, aby věty o limitě součtu, součinu a podílu platily i pro práci s nekonečnem.

Věta 3.5 Pro $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ platí:

(+) Pokud $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{respektive } -\infty) \\ g \text{ je omezené zdola (respektive shora) na } P_\Delta(x_0) \end{array} \right\}$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$ (resp. $-\infty$)

(*) Pokud $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty) \\ g \text{ je omezená zdola (resp. shora) čísla} \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \text{resp. } -\beta \\ (\beta > 0) \end{array} \right\} \text{ na } P_\Delta(x_0), \end{array} \right.$

pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

$\left(\div\right)$ • Pokud $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ a $\left\{ \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{array} \right\}$ na $P_\Delta(x_0)$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array} \right.$.

• Pokud $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = 0$.

Dk $\boxed{\text{Ad}(+)}$ Víme: $(\forall \tilde{L} > 0)(\exists P_\delta(x_0))(x \in P_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > \tilde{L})$ (1)

$(\exists M > 0)(\exists P_\Delta(x_0))\ x \in P_\Delta(x_0) \Rightarrow g(x) > -M$ (2)

Pro $L > 0$ libovolné pevné, definuj $\tilde{L} := L + M$ a pro toto $\tilde{L}$ najdi $\delta > 0$ tak, že platí (1). Pak pro $x \in P_\delta(x_0) \cap P_\Delta(x)$ je $f(x) + g(x) > \tilde{L} - M = L + M - M = L$. Tedy dle definice $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$.

$\boxed{\text{Ad}(*)}$ Předpokládáme, že platí (1) a navíc

$(\exists \alpha > 0)(\exists \tilde{\delta} > 0)(\forall x \in P_{\tilde{\delta}}(x_0))\ g(x) > \alpha > 0$. (3).

Pro $L > 0$ libovolné, polož $\tilde{L} := \frac{L}{\alpha}$ a k němu určeme δ tak, že (1) platí. Pak pro $x \in P_\delta(x_0) \cap P_{\tilde{\delta}}(x_0)$: $f(x) g(x) \geq \frac{L}{\alpha} \alpha = L > 0$.

$\boxed{\text{Ad}(\div)}$ Pokud $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ a $f(x) > 0$. Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0+$. Dle Věty 3.1, část (1): $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Zbylá tvrzení si ověřte sami. ▨

<u>Cvičení</u> Ukažte, že platí: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ omezené zdola na $P_\delta(x_0)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow$ — " — shora na $P_\delta(x_0)$.

Věta 3.6 (sendvičová) (i) Věta 8 platí i pro $x_0=+\infty$ nebo $x_0=-\infty$.

(ii) Nechť $x_0\in\mathbb{R}^*$, $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Pokud $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ a $f(x)\le g(x)$ na $P_\Delta(x_0)$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.

Dk Sami.

Věta 3.7 (l'Hospitalova) (případy $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{A}{\infty}$). Buď $x_0\in\mathbb{R}^*$.

Jestliže

(1) Existuje $P_\delta(x_0)$ tak, že $\forall x\in P_\delta(x_0)$ existují $f'(x)$ a $g'(x)$,

(2) Existuje $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\mathbb{R}^*$

(3) Buď $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ Nebo $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$,

Potom $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A}$. Totéž platí pro jednostranné limity.

Dk později v sekci 4.

Příklady ① Přímo z definice: $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} x=\pm\infty}$

② z definice resp. Věty o exponenciále plyne $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty}$

a $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0+}$. Odtud $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty}$ a $\boxed{\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty}$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $(n\in\mathbb{N})$ neboť $x<x^n$ pro $x\ge 1$ a dle sendvičové věty dostáváme závěr (též z ①)

④ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}+\infty & n \text{ sudé}\\ -\infty & n \text{ liché}\end{cases}}$ neboť $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\lim\limits_{-x\to+\infty}(-x)^n=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)^n x^n=\begin{cases}+\infty\\ -\infty\end{cases}$

⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(\alpha\ln x)=\begin{cases}+\infty & \text{je-li } \alpha>0\\ 1 & \text{je-li } \alpha=0\\ 0 & \text{je-li } \alpha<0\end{cases}$

⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\dots+\frac{a_0}{x^n}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\lim\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\dots+\frac{a_0}{x^{n-1}}\right)=\begin{cases}+\infty & \text{je-li } a_n>0.\\ -\infty & \text{je-li } a_n<0.\end{cases}$

POROVNÁNÍ RYCHLOSTI KONVERGENCE

Víme: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ (je-li $\alpha>0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Zajímá nás otázka, která z těchto funkcí jde k $+\infty$ nejrychleji, která nejpomaleji. Protože $e^x \cdot e^{-x} = 1$ implikuje $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, lze se ptát, která z funkcí e^{-x}, $\frac{1}{x^\alpha}$, $\frac{1}{x^\beta}$ $(\beta>\alpha>0)$, $\frac{1}{\ln x}$ konvergují k 0 pro $x\to+\infty$ nejrychleji a nejpomaleji.

Platí:

(i) Buď $\alpha>0$ libovolné. Pak existuje $k\in\mathbb{N}$ takové, že $k-1\le\alpha\le k$. Tedy

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} \overset{l'H}{\underset{k\text{-krát}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\underbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}_{>0}\,x^{\alpha-k}} = \lim_{x\to+\infty} x^{k-\alpha}e^x = +\infty}$$

(ii) Buď $\alpha>0$ libovolné.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = \alpha\lim_{x\to+\infty}x^\alpha = +\infty$$

(iii)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad \text{dle (i)}$$

Tedy: libovolně malá mocnina jde do $+\infty$ rychleji než $\ln x$, ale naopak e^x jde do $+\infty$ rychleji než libovolně velká mocnina.

$\boxed{x\to+\infty}$

konvergence k $+\infty$		konvergence k 0	
e^x		$e^{-x}=\frac{1}{e^x}$	
x^α	$\beta<\alpha$	$\frac{1}{x^\alpha}$	$\beta<\alpha$
x^β		$\frac{1}{x^\beta}$	
$\ln x$		$\frac{1}{\ln x}$	

V tabulce jsou srovnány konvergence dle rychlosti od nejrychlejší (nahoře) k nejpomalejší (dole).

3.2. Klasifikace nekonečně malých a nekonečně velkých veličin, Symboly o, O.

Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, pak se někdy říká, že **f je v x_0 nekonečně malá**

Naopak, je-li $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, pak **$f$ je v x_0 nekonečně velká**

Jsou-li f a g dvě různé funkce, které jsou v x_0 nekonečně malé (nebo nekonečně velké) je užitečné umět porovnat jejich rychlost s jakou malosti (velikosti) v x_0 nabydou (viz Tabulka na str. 3/7). Je také ~~ ~~ užitečné umět porovnávat funkce s komplikovaným zápisem s funkcemi elementárními.

Definice Buď $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}^*$.

[1] Píšeme $\boxed{f=o(g) \text{ pro } x=a}$ (a říkáme, že f je malé o funkce g pro $x=a$)

$$\stackrel{df}{\equiv} \boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0}$$

[2] Píšeme $\boxed{f=O(g) \text{ pro } x=a}$ (a říkáme, že f je velké O fce g pro $x=a$)

$$\stackrel{df}{\equiv} (\exists K\in\mathbb{R})(\exists P(a))\ |f(x)|\le K|g(x)|$$

[3] Píšeme $\boxed{f\sim g \text{ pro } x=a}$ (a říkáme, že f je slabě ekvivalentní s g pro $x=a$; nebo: f je řádově stejná jako g v $x=a$)

$$\stackrel{df}{\equiv} \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

[4] Píšeme $\boxed{f\simeq g \text{ pro } x=a}$ (a říkáme: f je silně ekvivalentní s g pro $x=a$; nebo: f se chová jako g v $x=a$)

$$\stackrel{df}{\equiv} \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

Cvičení ① Ukažte, že relace $\boxed{f\sim g \text{ pro } x=a}$ je skutečně ekvivalence (tj. platí $f\sim f$ (reflexivita), $f\sim g\Rightarrow g\sim f$ (symetrie), $(f\sim g)\wedge(g\sim h)\Rightarrow f\sim h$ (transitivita))

② Ukažte, že platí: (vše pro $x=a$)

(i) $f\sim g \Rightarrow f=O(g)\wedge g=O(f)$

(ii) $f\simeq g \Rightarrow f\sim g$

(iii) $f=o(g) \Rightarrow f=O(g)$

(iv) $f_1=O(g)\wedge f_2=O(g) \Rightarrow f_1+f_2=O(g)$

(v) $f=O(g)\wedge g=O(h) \Rightarrow f=O(h)$

(vi) $f_i\sim g_i\ (i=1,2) \Rightarrow f_1f_2\sim g_1g_2$, $\frac{f_1}{g_2}\sim\frac{g_1}{g_2}$ (ALE NIKOLIV $f_1+f_2\sim g_1+g_2$. Např. $f_1=\sin x$, $f_2=-\sin x$, $g_1=x$, $g_2=x$, v $a=0$.)

③ Ukažte, že zápis $f = O(1)$ znamená, že f je na nějakém prstencovém okolí omezená, tj. $\boxed{f = O(1)} \iff \boxed{(\exists K>0)\,(\exists P_\delta(a))\ |f(x)| < K}$

Příklady ① Z Tabulky, str. 3/7, plyne $x^\alpha = o(e^x)$ pro $x = +\infty$ a také $\ln x = o(x^\alpha)$ pro $x = +\infty$ } pro $\alpha > 0$ libovolné.

② Pro $x = 0$ platí: $\sin x \simeq x$, $\operatorname{tg} x \simeq x$, $\cos x \simeq 1$, $\operatorname{cotg} x \simeq \frac{1}{x}$, $\arcsin x \simeq x$, ...
$1 - \cos x \sim x^2$

③ Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí: $x \sin x = O(x)$ neboť $|x \sin x| \leq |x|$.

④ Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $\operatorname{tg} x - \sin x = o(x^\alpha)$ pro $x = 0$.

Řešení: Protože
$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^\alpha} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha - 3}},$$ tak
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^\alpha} = 0 \iff \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{\alpha-3}} = 0 \iff \alpha - 3 < 0 \iff \boxed{\alpha < 3}$$
Protože pro $\alpha = 3$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$$ tak $\boxed{\operatorname{tg} x - \sin x \sim x^3}$ a $\boxed{\operatorname{tg} x - \sin x \simeq \frac{x^3}{2}}$

---

⑤ Nechť $\boxed{f = o(g) \text{ pro } x = a}$, f je "ošklivá"/komplikovaná fce a g je elementární fce ("pěkná").

Pokud $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to a} g(x) = 0 \\ \lim_{x \to a} g(x) = +\infty \end{array} \right\}$ pak vyvozujeme: $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ a } f \text{ jde k } 0 \text{ rychleji než } g. \\ \text{buď } f \text{ je omezená v } P_\delta(a) \text{ nebo } f \text{ jde k } +\infty \text{ pomaleji než } g. \end{array} \right.$

3.3 LIMITY A MONOTÓNIE

V této sekci se zaměříme na funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a budeme zkoumat vlastnosti limit založené na možnosti uspořádat (funkční) hodnoty f a g nebo jinou funkce f samotné. (NELZE tedy předpokládat, že $f,g:\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$.) K této sekci tématicky patří již dříve zformulované věty o strážnících (sendvičové věty).

Věta 3.8 (Limitní přechod v nerovnostech) Buď f,g definované na okolí $x_0\in\mathbb{R}^*$ ($f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ale i $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ pak $x_0=+\infty$)

Jestliže:

- existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (a rovná se A)
- existuje $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (a rovná se B)
- $(\exists P_\delta(x_0))\,(\forall x\in P_\delta(x_0))\quad f(x)\le g(x)$

Pak:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Přechodem k limitě se uspořádání neztratí.

Příklad (který ukazuje, že nelze očekávat, že zesílením dřívějšího předpokladu $\boxed{(\exists P_\delta(x_0))(\forall x\in P_\delta(x_0))\quad f(x)<g(x)}$ by mohlo platit silnější tvrzení

$$\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Uvažme např. (1) $f(x)=x^2$ a $g(x)=|x|$, pak pro $0<\delta<1$ platí: $f(x)<g(x)$ $\forall x\in P_\delta(0)$.

Ale $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

(2) $f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ a $g(x)=\frac{1}{x}$. Pak $f(x)<g(x)$ v $U_\delta(+\infty)$ pro $\forall\delta>0$,

ale $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Dk věty 3.8 Nechť pro jednoduchost $A,B\in\mathbb{R}$. Chceme ukázat, že $A\le B$. Sporem předpokládejme, že $A>B$. Pak k $\varepsilon=\frac{1}{2}(A-B)$ najdu z existence limit $P_\delta(x_0)$ tak, že pro všechna $x\in P_\delta(x_0)$:

$$\underline{\tfrac{1}{2}(A+B) = A-\tfrac{1}{2}(A-B) < f(x)} < A+\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$B-\tfrac{1}{2}(A-B) < \underline{g(x) < B+\tfrac{1}{2}(A-B) = \tfrac{1}{2}(A+B)}$$

Z podtržených vztahů plyne: $g(x)<\frac{1}{2}(A+B)<f(x)\quad\forall x\in P_\delta(x_0)$

což je spor s třetím předpokladem věty 3.8. ■

Věta 3.9. Buď $a<b$ a $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Označme $J:=(a,b)$.

Je-li f neklesající na (a,b), pak $\begin{cases} \lim\limits_{x\to b-} f(x) = \sup f(J) \\ \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \inf f(J). \end{cases}$
$\{x<y \Rightarrow f(x)\le f(y)\}$

Je-li f nerostoucí na (a,b), pak $\begin{cases} \lim\limits_{x\to b-} f(x) = \inf f(J) \\ \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \sup f(J), \end{cases}$
$\{x<y \Rightarrow f(x)\ge f(y)\}$

kde $\sup f(J)$ a $\inf f(J)$ chápeme v $\mathbb{R}^*$.

(Dk) Věta 3.9 obsahuje mnoho variant, důkaz provedeme pro dvě z nich.

(i) Buď f neklesající v J a $\sup f(J)=+\infty$. Chceme ukázat:

$$\lim_{x\to b-} f(x)=+\infty \iff (\forall L>0)(\exists \delta>0)\left(\forall x\in \begin{cases}(b-\delta,b) & \text{je-li } b\in\mathbb{R}\\ (\frac{1}{\delta},+\infty) & \text{-||- } b=+\infty\end{cases}\right) f(x)>L$$

Vzhledem k monotónii f stačí ukázat:

(Δ) $(\forall L>0)(\exists x_0<b)(f(x_0)>L)$

Nechť (Δ) neplatí. Pak $(\exists L>0)(\forall x_0<b)(f(x_0)\le L)$, což je však spor se skutečností, že $\sup f(J)=+\infty$.

(ii) Buď f nerostoucí v J a $\sup f(J)=A\in\mathbb{R}$. Chceme ukázat, že

$$\lim_{x\to a+} f(x)=A \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(\forall x\in \begin{cases}(a,a+\delta) & \text{je-li } a\in\mathbb{R}\\ (-\infty,-\frac{1}{\delta}) & \text{je-li } a=-\infty\end{cases}\right) \text{ platí}$$

$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$, což se redukuje na

$A-\varepsilon<f(x)$

Opět díky monotónii stačí ukázat, že

$(\tilde\Delta)$ $(\forall\varepsilon>0)(\exists x_0>a)(f(x_0)>A-\varepsilon)$

Kdyby však $(\tilde\Delta)$ neplatilo, pak $(\exists \varepsilon_0>0)(\forall x>a)(f(x)\le A-\varepsilon_0)$ což je ↯ ∎.

VÝZNAMNÝ DŮSLEDEK VĚTY 3.9. PRO POSLOUPNOSTI

Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ nerostoucí (nebo neklesající), pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje (vlastní či nevlastní). Neboli: **MONOTÓNNÍ POSLOUPNOST MÁ VŽDY LIMITU**

Je-li $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ nerostoucí (nebo neklesající) a omezená zdola (nebo omezená shora), pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje a je vlastní.

neboli:

OMEZENÁ MONOTÓNNÍ POSLOUPNOST MÁ VŽDY VLASTNÍ LIMITU.

3.4 Limity posloupností

(*) Existuje-li $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ a rovná se $A \in \mathbb{R}^*$ (nebo $\mathbb{C}^*$), pak také existuje
$$\lim_{n\to+\infty} f(n)$$

Tak lze spočítat mnoho limit posloupností.

__Příklad__ Spočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

__Řešení__: Uvaž $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ a počítejme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Platí:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$\overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to0+}\exp\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right) = \exp\left(\lim_{y\to0+}\frac{\ln(1+y)}{y}\right)$$
$$= \underline{\underline{e}}.$$

! POZOR ! NAPROSTO CHYBNÁ JE TATO ÚVAHA (jak ukazuje správné řešení výše):
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{-krát}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{-krát}}$$
$$= 1 \quad \text{neboť} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

URČETE, KDE PŘESNĚ JE ZAKOPANÝ PES!

Následující příklad ukazuje, že opačná implikace k (*) neplatí.

__Příklad__ (NEPLATÍ: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ existuje $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existuje)

__Řešení__

Definuj $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(k-\frac{1}{4}, k+\frac{1}{4}\right) \quad k\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Pak $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2}+n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

Tedy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje.

Platí však následující charakterizace $\lim_{x\to x_0} f(x)$ pomocí limit posloupností.

$\boxed{\text{Věta 3.10}}$ (Heine - základní věta) Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*(\mathbb{C}^*)$.
Platí:

(*) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff (\forall \{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0)(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A)$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ Víme z předpokladu: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in P_\delta(x_0))(f(x) \in U_\varepsilon(A))$.
Nechť $\{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}$ je libovolná (pevná) posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$: $x_n \in P_\delta(x_0)$. Pak
dle předpokladu $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$, což jsme chtěli ukázat.

$\boxed{\Leftarrow}$ (Hlubší / těžší / netriviální implikace)
Důkaz povedeme sporem, tzn. předpokládáme platnost (PS)(*) a zároveň
$\neg(\lim_{x\to x_0} f(x) = A)$, což je ekvivalentní $(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall \delta$, speciálně pro $\delta = \frac{1}{n})$
existuje $x_n \in P_{\frac{1}{n}}(x_0)$ tak, že $\boxed{f(x_n) \notin U_{\varepsilon_0}(A)}$. Takto nalezená
posloupnost $\{x_n\}$ však konverguje k x_0 a dle (PS)(*) platí
$\boxed{f(x_n) \in U_\varepsilon(A)}$ od jistého indexu n_0, což dává spor ↯. ▨

$\boxed{\text{Věta 3.10*}}$ (zesílená Heineho věta) Za předpokladů stejných jako ve Větě 3.1[0]
platí
(**) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje $\iff (\forall \{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}, \lim x_n = x_0)(\lim f(x_n)$ existuje$)$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ stejný jako u Věty 3.10.

$\boxed{\Leftarrow}$ Na první pohled není zřejmé, že pro každou posloupnost je
$\lim f(x_n)$ stejná. Avšak posloupnosti stejnou limitu mít musí.
Kdyby ne, tak existují:

- $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tak, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$
- $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ tak, že $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ a $\lim f(y_n) = B$
- $A \neq B$.

Pak však sestrojíme posloupnost $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$: $\xi_n = \begin{cases} x_n & n \text{ liché} \\ y_n & n \text{ sudé}. \end{cases}$

Pak určitě $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$, ale $\lim \xi_n$ neexistuje,
což je spor ↯, neboť všechny posloupnosti splňující $\xi_n \to x_0$
musí splňovat, dle předpokladu, $\lim_{n\to\infty} f(\xi_n)$ existuje. ▨

Heineho větu lze s výhodou využít, chceme-li dokázat, že $\lim_{x \to x_0} f(x)$ neexistuje: stačí nalézt dvě posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jdoucí k x_0 tak, že

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(y_n).$$

Příklad Ukažte, že $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje.

Řešení Definujme $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ předpisem $\frac{1}{x_n} = 2\pi n$ tj. $\boxed{x_n = \frac{1}{2\pi n}}$

a Definujme $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — " — $\frac{1}{y_n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(1+4\pi n)$

tj. $\boxed{y_n = \frac{2}{\pi(1+4\pi n)}}$

Pak $\lim_{n \to \infty} \sin\frac{1}{x_n} = 0 \neq 1 = \lim_{n \to \infty} \sin\frac{1}{y_n}$

Věta 3.10** (Heineho "definice" spojitosti) Platí:

f je v x_0 spojitá $\Longleftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f : x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

Dk Plyne z definice spojitosti a Věty 3.10. ▨

Heineho věta, ale i samotná definice limity vede k otázce, zda lze o existenci limity (fce či posloupnosti) rozhodnout jen z funkčních hodnot f na okolí $P_\delta(x_0)$, aniž bychom tedy pracovali se samotnou hodnotou limity.

Positivní odpověď dává tzv. Bolzano-Cauchyho podmínka. Ještě dříve si však zformulujeme a ukážeme známou větu Weierstrassovu. Tato věta říká, že

z každé omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost, která je konvergentní.

Tuto větu oceníme nejen při důkazu Bolzano-Cauchyho podmínky, ale i dalších hlubokých vět reálné analýzy.

Definice (podposloupnost) Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ daná posloupnost. Nechť n_k je rostoucí posloupnost přirozených čísel (např. $n_1 = 2, n_2 = 7, n_3 = 1007, n_4 = 1008, n_5 = 2\,356\,421, \dots$) Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazveme podposloupností vybranou z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 3.11 (Weierstrass) Z každé omezené posloupnosti (reálných) čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Idea důkazu je následující: z dané omezené posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ budeme vybírat podposloupnost kontrolovanou shora i zdola dvě monotónními posloupnostmi (strážníky), mající dle důsledku Věty 3.9. limity, které se navíc budou shodovat. Tu samou limitu tak bude mít i vybraná podposloupnost.

Dk Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, tak existují $A_0, B_0 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$A_0 < a_n < B_0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Definujeme monotónní posloupnosti $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ takto:

- Označ $C_n := \frac{1}{2}(A_{n-1} + B_{n-1})$

- Pak alespoň v jednom z intervalů (A_{n-1}, C_n) a $\langle C_n, B_{n-1})$ leží nekonečně mnoho prvků z $\{a_n\}$.
  - Je-li ∞-prvků v (A_{n-1}, C_n), polož $\boxed{A_n := A_{n-1}}$ a $\boxed{B_n := C_n}$
  - Není-li ∞-prvků v (A_{n-1}, C_n), polož $\boxed{A_n = C_n}$ a $\boxed{B_n = B_{n-1}}$
- Protože $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, tak dle Věty 3.9. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} B_n$ existují (vlastní).

Navíc
- $|A_n - B_n| = \frac{1}{2^n}|A_0 - B_0| \longrightarrow 0$ pro $n \to \infty$. Tedy

(•)
- $\lim\limits_{n\to\infty} A_n =: L = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$

Nyní vybereme podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ takto:

- $a_{n_0} \in (A_0, B_0)$ zvolme libovolně z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
- $a_{n_1} \in \langle A_1, B_1 \rangle$ zvolme tak, aby $a_{n_1} \in \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $n_1 > n_0$

$\vdots$

- $a_{n_k} \in \langle A_k, B_k \rangle$ zvolme tak, aby $\{a_{n_k}\} \in \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $n_k > n_{k-1}$.

Pak z konstrukce plyne

$$A_k \le a_{n_k} \le B_k$$

a dle věty o dvou strážnících (a (∗)): $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$; tedy

$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní. ▨

$\boxed{\text{Věta 3.11*}}$ Není-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená shora, pak $\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = \infty$.

Není-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená zdola, pak $\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$.

Dk: Označ $M_k = \{a_n;\ a_n \ge k\}$. Pak M_k má ∞ prvků a $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konstruujeme takto:

- $a_{n_1} \in M_1$ libovolné
- $k > 1$ $\quad a_{n_k} \in M_k$, $\quad n_k > n_{k-1}$. ▨

$\boxed{\text{Věta 3.12}}$ (Bolzano-Cauchyho podmínka; B-C)

Pro funkce

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \ (\text{nebo } \mathbb{C}) \iff \boxed{(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x', x'' \in P_\delta(x_0))\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon} \ \text{(B-C)}$$

Pro posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \ (\text{nebo } \mathbb{C}) \iff \boxed{(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n, m \ge n_0)\ |a_n - a_m| < \varepsilon} \ \text{(B-C)}$$

! $\boxed{\text{Definice}}$ Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je <u>CAUCHYOVSKÁ</u> pokud $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n, m \ge n_0)\ |a_n - a_m| < \varepsilon$.
(tedy pokud $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje B-C podmínku).

Dk $\boxed{\text{věty 3.12}}$ $\boxed{\Longrightarrow}$ Plyne z nerovnosti

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A + A - f(x'')| \le |f(x') - A| + |f(x'') - A|.$$

Sami promyslete proč.

$\boxed{\Longleftarrow}$ K $\varepsilon = 1$ existuje $P_\delta(x_0)$ takové, že pro $\hat{x} \in P_\delta(x_0)$ a pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ platí: $f(\hat{x}) - 1 < f(x) < f(\hat{x}) + 1$. Tedy f je na $P_\delta(x_0)$ omezená.

Iterativně:

K $\varepsilon = \frac{1}{m}$ existuje $P_{\delta_m}(x_0)$ tak, že pro $x_m \in P_{\delta_m}(x_0)$ a pro
(•) všechna $x'' \in P_{\delta_m}(x_0)$ $|f(x'') - f(x_m)| < \frac{1}{m}$. $(0 < \delta_m < \delta_{m-1} \ \forall m)$

Tak $x_m \to x_0$ pro $m \to \infty$ a $\{f(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ je omezená.

Dle Weierstrassovy věty 3.11 existuje $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že

(••) $f(x_{m_k}) \to A$ pro $k \to +\infty$.

Pak víme

$$|f(x) - A| = |f(x) - f(x_{m_k})| + |f(x_{m_k}) - A|$$

a druhý člen lze udělat libovolně malý díky (••)

a ~~druhý~~ první člen je malý jak potřeba dle (•). ▨

Existuje ještě další možnost jak přiřadit dané posloupnosti posloupnost konvergentní.

<u>Def.</u> Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme
$b_n := \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$
$c_n := \inf\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$

Pak • $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$

a • $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq c_n \leq \dots$

Navíc

(☆) $$c_n \leq a_n \leq b_n$$

Existují (díky monotonii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Označme

je $\boxed{\limsup\limits_{n\to\infty} a_n}$ a $\boxed{\liminf\limits_{n\to\infty} a_n}$

$\boxed{\overline{\lim}\, a_n}$ a $\boxed{\underline{\lim}\, a_n}$

Z (☆) plyne: • $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ a také

(△) • $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje.

<u>Vidíme</u>: Pokud $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje.

Naopak, pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje, pak se $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ jak dokážeme níže. Platí tedy:

Věta 3.13 (Jiná charakterizace existence limity posloupnosti)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}^* \text{ existuje} \iff \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

$$\left(\liminf_{n\to\infty} a_n\right) \quad \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right)$$

Dk $\boxed{\Leftarrow}$ již dokázáno: plyne z (Δ).

$\boxed{\Rightarrow}$ Buď $\varepsilon>0$ dáno libovolně, ale pevně. Ukážeme, že

$$0 \leq \left(\limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} a_n\right) < \varepsilon.$$

K danému $\varepsilon>0$ najdeme n_0 tak, že $|a_i - a_j| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $i,j \geq n_0$. Pak však

$$b_n := \sup\{a_k ;\ k \geq n \geq n_0\} \quad \text{a} \quad c_n := \inf\{a_k ;\ k \geq n \geq n_0\}$$

splňují $0 \leq (b_n - c_n) \leq |a_i - a_j| < \frac{\varepsilon}{2}$

Tedy

$$0 \leq \underbrace{\lim b_n}_{= \overline{\lim}\, a_n} - \underbrace{\lim c_n}_{= \underline{\lim}\, a_n} < \varepsilon \quad ,$$

což jsme chtěli ukázat. ■