

Jméno a příjmení: _____

Příklad	1	2	3	Celkem bodů
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

- [8] 1. Zformulujte základní větu diferenciálního a integrálního počtu a dokažte s její pomocí, že je-li funkce f spojitá na $\mathbb{R}$, pak má funkce f primitivní funkci (na množině $\mathbb{R}$).

Ukažte, že funkce

$$f(x) = \int_0^{\sin(x)} \sqrt{\tan \xi} d\xi,$$
$$g(x) = \int_0^{\tan(x)} \sqrt{\sin \xi} d\xi,$$

jsou dobře definovány na nějakém (pravém) okolí bodu 0 (to jest dokažte, že oba integrály – napište jestli ve smyslu Newtonova či Riemannova intergálu – existují pro libovolné x z daného okolí bodu 0).

Ukažte, že funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou diferencovatelné (zprava) v nule (to jest, že existuje $f'(0+)$ a $g'(0+)$) a spočtete hodnoty těchto derivací $f'(x)$ a $g'(x)$ pro $x \in [0, \delta)$.

Spočtete limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^{\sin(x)} \sqrt{\tan \xi} d\xi}{\int_0^{\tan(x)} \sqrt{\sin \xi} d\xi}.$$

- [8] 2.
- Zformulujte a dokažte Cauchy odmocninové kritérium pro číselné řady a to jak v limitním tak limitním tvaru.
 - Zdefinujte pojem mocninné řady a definici poloměru konvergence dané mocninné řady. Zformulujte a dokažte základní tvrzení týkající se konvergence respektive divergence mocniných řad. Zaměřte se na souvislosti s odmocninovým kritériem.

- [8] 3.
- Uveďte metrickou definici (=definici založenou na pojmu konvergence) kompaktní množiny $K \subset \mathbb{R}^d$.
 - Dokažte, vycházejte z této definice a pojmu spojitosti funkce, že platí: *Obraz kompaktní množiny při spojitém zobrazení je kompaktní množina.*
 - Jaké další vlastnosti platí pro spojitou funkci na kompaktních množinách v $\mathbb{R}^d$? Vlastnosti zapište, tvrzení nedokazujte.
 - Zapište prostor ℓ^2 a shrňte jeho základní vlastnosti. Speciálně: zapište jednotkovou kouli v prostoru ℓ^2 . Je uzavěr této koule kompaktní v ℓ^2 ?