Cantorovo diskontinuum (nebo Cantorova množina) je množina bodů intervalu $\boxed{\langle 0,1\rangle}$, kterou získáme iterativním procesem, kdy v prvním kroku vynecháme vnitřní třetinu a zůstanou nám intervaly $\langle 0,\frac{1}{3}\rangle$ a $\langle \frac{2}{3},1\rangle$. Z nich opět vybereme vnitřní třetiny, a takto postupujeme dál. Doplňme tuto konstrukci o obrázek a matematický popis:

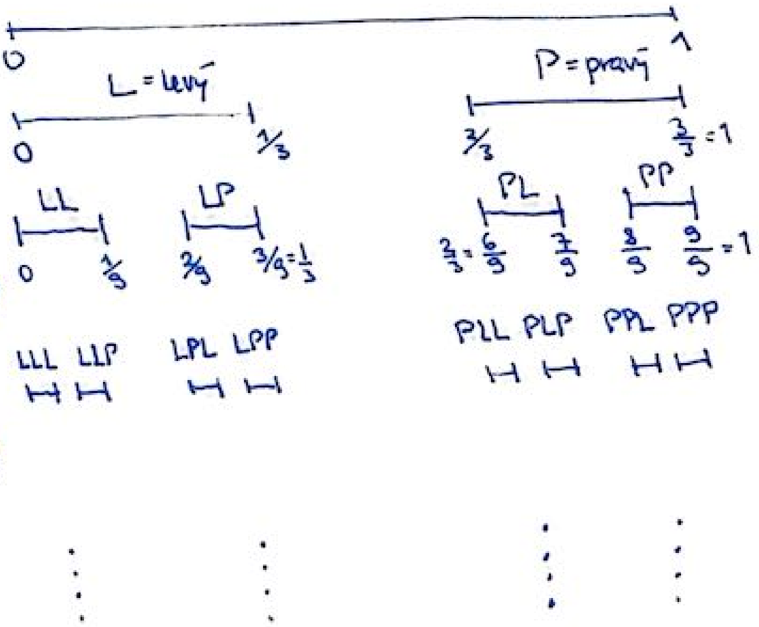
$$I_0 = \langle 0,1\rangle$$

$$I_1 = \langle 0,\tfrac{1}{3}\rangle \cup \langle \tfrac{2}{3},1\rangle = L \cup P$$

$$I_2 = \langle 0,\tfrac{1}{3^2}\rangle \cup \langle \tfrac{2}{3^2},\tfrac{3}{3^2}\rangle \cup \langle \tfrac{6}{3^2},\tfrac{7}{3^2}\rangle \cup \langle \tfrac{8}{3^2},\tfrac{9}{3^2}\rangle = LL \cup LP \cup PL \cup PP$$

$$I_3 = \bigcup_{\substack{k=0,2,6,8\\18,20,24,26}} \langle \tfrac{k}{3^3},\tfrac{k+1}{3^3}\rangle = \bigcup_{x,y,z\in\{L,P\}} xyz$$

$\vdots$



Cantorova množina (diskontinuum) je definována takto

$$C := \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$$

Všimněme si, že $\bigcap_{j=1}^{1} I_j = L \cup P$, $\bigcap_{j=1}^{2} I_j = LL \cup LP \cup PL \cup PP$, atd.

Tzn., že každý bod z C mohu ztotožnit s nekonečnou posloupností symbolů P a L, např.

PLPPLP .....

Tento zápis má jasnou geometrickou interpretaci: první písmeno říká zda dané číslo vyskytá ze třetiny vPravo či vLevo, a další opět zda jsem vybral v té příslušnosti Pravou nebo Levou třetinu, atd..

Tedy $\boxed{x \in C \iff x \text{ lze ztotožnit s posloupností obsahující } \underset{P}{\underset{\shortparallel}{0}} \text{ a } \underset{L}{\underset{\shortparallel}{1}}}$

Ukažme, že C je $\boxed{\text{nespočetná}}$ sporem Cantorovou diagonalizací:

*) Z konstrukce plyne, že právě všechny kombinace 0 a 1 (P a L) patří do C.

Nechť C je spočetná, tzn. C lze uspořádat do posloupnosti $C = \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ kde každé X_n je posloupnost 0 a 1 (nebo P a L). Máme tedy ∞-tabulku:

$$\begin{array}{llllllll}
X_1: & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & \cdots & x_{1n} \cdots \\
X_2: & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & \cdots & x_{2n} \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
X_k & x_{k1} & x_{k2} & x_{k3} & x_{k4} & x_{k5} & \cdots & x_{kn} \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

kde $x_{kj} \in \{0,1\} (= \{P, L\})$

Zadefinujme prvek X^* takto:

$$X^* \qquad x_i^* = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x_{ii} = 1 \\ 1 & \text{je-li } x_{ii} = 0 \end{cases}$$

Pak $X^* \in C$, ale $X^* \neq X_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, což dává spor. ↯

C je tedy $\boxed{\text{nespočetná.}}$

Dále: $C \subset I_k$ pro $\forall k$ a délka intervalů obsažených v I_k je $\left(\frac{1}{3}\right)^k$, přičemž jejich počet je 2^k. Tedy objem I_k je $V(I_k) = 2^k\left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^k \longrightarrow 0$ pro $k \to \infty$. Tedy pro $\forall \varepsilon > 0$ najdu k_0 tak, že $C \subset I_{k_0}$ a $V(I_{k_0}) < \varepsilon$.

Dle definice množin míry nula: $\boxed{C \text{ je množina míry nula.}}$