Termín pro odevzdání: čtvrtek 8. dubna 2021

Převedením na křivkový integrál v komplexní rovině a s využitím reziduové věty spočtěte následující integrál

$$I = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^3+1}\, dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

kde $v.p.$ značí integraci ve smyslu hlavní hodnoty chápanou zde jako

$$I = \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-1-\epsilon} \frac{\cos(tx)}{x^3+1}\, dx + \int_{-1+\epsilon}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{x^3+1}\, dx \right),$$

kde tedy singularitu integrandu u $x = -1$ symetricky vyjmeme ϵ-okolím, a následně zkoumáme limitu $\epsilon \to 0+$.

Postup (tipy):

1. Použijte postup ze cvičení, založený na přepisu kosinu jako reálné části komplexní exponencialy.
2. Přejděte ke komplexní proměnné, najděte a charakterizujte singularity získané funkce.
3. Uvažujte integrační křivku, která obchází singularitu na reálné ose po "malé" půlkružnici a vhodně se uzavírá "velkým" obloukem (pozor na znaménko t).
4. Napište parametrizaci všech použitých křivek.
5. Dopočtěte integrál využitím reziduové věty, Jordanova lemmatu a lemmatu o obcházení pólu násobnosti 1. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte.
6. HINT: Práci Vám může usnadnit úvaha o paritě integrálu vzhledem k proměnné t.
7. BONUS: Zkuste spočítat hlavní hodnotu integrálu pro $t = 0$ klasicky a porovnejte s výsledkem získaným postupem výše.