Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	9	12	12	3	36
Získáno					

[9] 1. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{2}{n}}\right)^{n^2}.$$

Řešení:

Počítejme limitu funkce

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)}.$$

Označme

$$L \equiv \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right).$$

a počítejme

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)}{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}\cdot\frac{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}{x^2},$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili znalost limity

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1,$$

a větu o limitě složené funkce a větu o limitě součinu.

Dále máme

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2},$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili toho, že

$$\lim_{x\to 0}\cos 2x = 1,$$

a větu o limitě podílu.

Konečně, s využitím identity $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ a přičtením a odečtením jedničky, dostáváme

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + 1 - 1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2}+2 = \frac{3}{2},$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili větu o limitě součtu a ve třetí rovnosti znalost limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

spolu s větou o limitě součinu.

Pro původní limitu funkce tedy máme

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^L = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}.$$

Stejnou hodnotu bude mít i zadaná limita posloupnosti podle Heineho věty s volbou $x_n = \frac{1}{n}$.

Alternativní způsob výpočtu L využívající l'Hôspitalovo pravidlo (limita typu „$\frac{0}{0}$“):

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos 2x}{\cos x}\cdot\frac{-\sin x\cos 2x + 2\cos x\sin 2x}{\cos^2 2x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x} + \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x\cos 2x} = -\frac{1}{2}+2 = \frac{3}{2},$$

kde jsme využili větu o limitě součtu a podílu a znalost limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

[12] 2. Uvažme funkci f zadanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^{-3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1. Určete největší interval, kde je funkce f spojitá.
2. Najděte globální extrémy funkce f.
3. Nalezněte primitivní funkci k f na intervalu určeném v bodě 1. Návod: Použijte první substituční metodu a metodu per partes.

Řešení:

1. Mimo počátek je funkce definovaná jako kombinace spojitých funkcí a je tam tedy spojitá. Zkoumejme limitu funkce f v počátku

$$\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{y^3}{\mathrm{e}^{|y|}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{y\to\pm\infty} \frac{3y^2}{(\operatorname{sign} y)\,\mathrm{e}^{|y|}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{y\to\pm\infty} \frac{6y}{\mathrm{e}^{|y|}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{y\to\pm\infty} \frac{6}{(\operatorname{sign} y)\,\mathrm{e}^{|y|}} = 0 = f(0),$$

kde jsme využili větu o limitě složené funkce a třikrát použili l'Hôspitalovo pravidlo na výpočet limity typu „$\frac{\text{něco}}{\infty}$“. Zadaná funkce je tedy spojitá na celém $\mathbb{R}$.

2. Protože

$$f(-x) = (-x)^{-3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{|-x|}} = -x^{-3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} = -f(x),$$

je zadaná funkce lichá a stačí se omezit na hledání extrémů na intervalu $[0, +\infty)$.

Najděme nejprve limitu v $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{-3} \cdot \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0 \cdot 1 = 0,$$

kde jsme využili větu o limitě součinu.

Spočítejme nyní derivaci funkce f

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = -3x^{-4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + x^{-5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = x^{-4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x} - 3\right).$$

Derivace bude nulová pro $x = \frac{1}{3}$, a protože pro $x \in [0, \frac{1}{3})$ je derivace zřejmě kladná a pro $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$ je záporná, nabývá funkce f tomto bodě globálního maxima (důsledek faktu, že v počátku a v nekonečnu jde funkce k nule).

Z lichosti pak dostáváme, že v bodě $-\frac{1}{3}$ nabývá funkce f globálního minima.

3. Z lichosti f stačí hledat primitivní funkci na intervalu $(0, +\infty)$ a nalezenou funkci potom rozšířit sudě na celou reálnou osu.

Použitím první substituční metody a metody per partes dostáváme

$$\int x^{-3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = x^{-1} \\ \mathrm{d}t = -x^{-2}\mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{cc} u = t & v = \mathrm{e}^{-t} \\ u' = 1 & v' = -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right| = t\mathrm{e}^{-t} - \int \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$
$$= (1+t)\,\mathrm{e}^{-t} + c = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + c.$$

Rozšíření nalezené primitivní funkce sudě na celé $\mathbb{R}$ pak vede na

$$\int x^{-3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\mathrm{d}x = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{|x|}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} + c, & x \neq 0 \\ c, & x = 0, \end{cases}$$

neboť primitivní funkce musí být spojitá a podle l'Hôspitalova pravidla (limita typu „$\frac{\text{něco}}{\infty}$“) máme

$$\lim_{x\to 0\pm} \int x^{-3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\mathrm{d}x = \lim_{y\to\pm\infty}\left(\frac{1+|y|}{\mathrm{e}^{|y|}} + c\right) = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{1+|y|}{\mathrm{e}^{|y|}} + c \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{y\to\pm\infty} \frac{\operatorname{sign} y}{(\operatorname{sign} y)\,\mathrm{e}^{|y|}} + c = c,$$

kde jsme také využili větu limitě složené funkce a větu o limitě součtu.

[12] 3. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \ln\left(\left|x^2 - 3x + 2\right|\right).$$

Řešení:

Protože platí

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2),$$

argument logaritmu je nulový pro $x = 1, 2$. V těchto bodech tedy nebude zadaná funkce definovaná. Pro ostatní x je argument logaritmu kladný a tedy $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Na definičním oboru je navíc f spojitá, neboť se jedná o složení spojitých funkcí.

Funkce není sudá ani lichá, není ani periodická.

Přepišme si zadanou funkci do tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(x^2 - 3x + 2\right), & x \in (-\infty, 1), \\ \ln\left(-x^2 + 3x - 2\right), & x \in (1, 2), \\ \ln\left(x^2 - 3x + 2\right), & x \in (2, +\infty), \end{cases}$$

který nám usnadní následující výpočty.

Limity v krajních bodech definičního oboru vycházejí následovně

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x\to 1} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x\to 2} f(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

První derivace je rovna

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x^2-3x+2}, & x \in (-\infty, 1), \\ \frac{-2x+3}{-x^2+3x-2}, & x \in (1, 2), \\ \frac{2x-3}{x^2-3x+2}, & x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Všimněme si, že $D_{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}} = D_f$.

První derivace se nuluje v bodě $x = \frac{3}{2}$ a jiní kandidáti na extrém neexistují. Protože na intervalu $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ je první derivace kladná a na intervalu $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ je záporná, dostáváme, že v bodě $x = \frac{3}{2}$ je lokální maximum. Globální extrémy funkce žádné nemá.

Ze znaménka první derivace pak dále dostáváme, že funkce je klesající na intervalech $(-\infty, 1)$ a $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ a rostoucí na intervalech $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ a $(2, +\infty)$.

Máme dostatek informací pro určení oboru hodnot $R_f = \mathbb{R}$.

Druhá derivace je rovna

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = \begin{cases} \frac{2\left(x^2-3x+2\right)-(2x-3)^2}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{-2x^2+6x-5}{(x^2-3x+2)^2}, & x \in (-\infty, 1), \\ \frac{-2\left(-x^2+3x-2\right)-(-2x+3)^2}{(-x^2+3x-2)^2} = \frac{-2x^2+6x-5}{(x^2-3x+2)^2}, & x \in (1, 2), \\ \frac{2\left(x^2-3x+2\right)-(2x-3)^2}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{-2x^2+6x-5}{(x^2-3x+2)^2}, & x \in (2, +\infty), \end{cases}$$

a opět máme $D_{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}} = D_f$. Protože kvadratická funkce $-2x^2 + 6x - 5$ má záporný determinant, druhá derivace se nikde nenuluje a neexistují tedy kandidáti na inflexní bod.

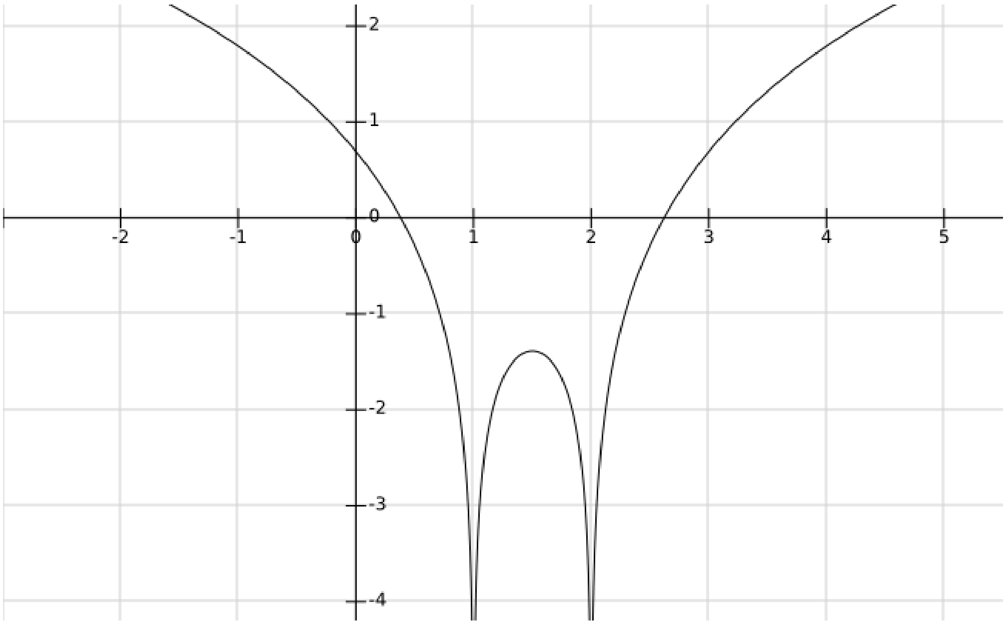
Ze znaménka druhé derivace dostáváme, že funkce je konkávní na všech třech intervalech $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ a $(2, +\infty)$.

V bodech $1, 2$ má funkce vertikální asymptotu. Asymptoty v nekonečnu nemá žádné neboť (s využitím l'Hôspitalova pravidla pro výpočet limity typu „$\frac{\text{něco}}{\infty}$")

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln\left(x^2 - 3x + 2\right)}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-3}{x^2 - 3x + 2} = 0,$$

a muselo by tedy platit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. To už ale víme, že není pravda.

Vybaveni těmito informacemi můžeme nakreslit graf (viz obrázek 1).



Obrázek 1: Graf funkce $\ln\left(\left|x^2-3x+2\right|\right)$

[3] 4. Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x\to -1+}\left(\arcsin x+\frac{\pi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

Řešení:

Protože

$$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2},$$

platí

$$\lim_{x\to -1+}\left(\arcsin x+\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Z definice limity tedy pro libovolné $\varepsilon>0$ najdeme $\delta>0$ takové, že

$$\left|\arcsin x+\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon,\quad x\in\mathcal{P}_\delta^+(-1),$$

kde $\mathcal{P}_\delta^+(-1)$ je pravé prstencové okolí bodu -1.

Funkce sin je omezená na celém $\mathbb{R}$ jedničkou a platí tedy

$$\left|\sin^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right|\le 1,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Celkově tak dostáváme

$$\left|\left(\arcsin x+\frac{\pi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{1}{1+x}\right)\right|<\varepsilon,\quad x\in\mathcal{P}_\delta^+(-1),$$

a protože ε bylo libovolné, je zadaná limita rovná nule.