Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	6	6	8	8	8	36
Získáno						

[6] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1([0,1]) \,|\, y(0) = 0,\ y(1) = 0 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_0^1 \left(y + yy' + y' + \frac{1}{2}(y')^2 \right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnici pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gâteaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nezáporná.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y + th)\bigg|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y + th) = \int_0^1 \left[(y + th) + (y + th)(y' + th') + (y' + th') + (y' + th')^2 \right] \mathrm{d}x,$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y + th) = \int_0^1 \left[h + h(y' + th') + (y + th)h' + h' + (y' + th')h' \right] \mathrm{d}x$$

po dosazení $t = 0$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y + th)\bigg|_{t=0} = \int_0^1 \left[h + hy' + yh' + h' + y'h' \right] \mathrm{d}x,$$

a proto

$$D\Phi(y)[h] = \int_0^1 \left[(1 + y')h + (1 + y + y')h' \right] \mathrm{d}x.$$

Po integraci *per partes* v členu s h' dostaneme

$$\int_0^1 \left[(1 + y') - (1 + y + y')' \right] h \mathrm{d}x$$

přičemž využíváme toho, že $h \in \left\{ g \in \mathcal{C}^1([0,1]) \,|\, g(0) = 0,\ g(1) = 0 \right\}$. Eulerova–Lagrangeova rovnice tedy je

$$-(1 + y + y')' + (1 + y') = 0$$

a rozderivováním získáme lineární obyčejnou diferenciální rovnici s konstantními koeficienty

$$-y'' + 1 = 0,$$

jejímž obecným řešením je zřejmě funkce

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2,$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty. Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek, má být

$$C_2 = 0,$$
$$\frac{1}{2} + C_1 + C_2 = 0,$$

odkud $C_2 = 0$, $C_1 = -\frac{1}{2}$ a tedy

$$y_{\text{ext}} = \frac{1}{2} x \left(x - 1\right).$$

Druhou derivaci funkcionálu Φ spočteme podle definice

$$\begin{aligned} D^2\Phi(y)[h,h] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D\Phi(y+th)[h]\right|_{t=0} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^1 \left[\left(1 + (y+th)'\right)h + \left(1 + (y+th) + (y+th)'\right)h'\right] \mathrm{d}x\right)\right|_{t=0} \\ &= \int_0^1 \left[2hh' + \left(h'\right)^2\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\left(h^2\right)' + \left(h'\right)^2\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(h'\right)^2 \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Okamžitě vidíme, že druhá derivace je nezáporná v jakémkoliv bodě y a navíc nezávisí na y. (To není překvapení, funkcionál Φ je “kvadratický” v proměnné y.) Druhá derivace vyčíslená v bodě y_{ext} je

$$D^2\Phi(y_{\text{ext}})[h,h] = \int_0^1 \left(h'\right)^2 \mathrm{d}x.$$

[6] 2. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2}.$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0,1]$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J a K, kde

a) $J = (0,1)$,

b) $K = (\alpha, 1)$, kde $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

Řešení:

Na intervalu $I = [0,1]$ zjevně platí

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

Označme

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0,1]. \end{cases}.$$

Zbývá rozhodnout, zda platí $f_n \rightrightarrows f$. Použijeme ekvivalentní charakterizaci stejnoměrné konvergence, která říká:

> Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnost reálných funkcí jedné reálné proměnné. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \to +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb
>
> $$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$
>
> právě když pro $n \to +\infty$ platí
>
> $$\sigma_n \to 0,$$
>
> kde
>
> $$\sigma_n =_{\text{def}} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|.$$

Funkce f_n je na intervalu J i K klesající funkce. Zabývejme se nyní intervalem J. Platí

$$\sigma_n = \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to 0+} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{-nx^2} = 1,$$

a následně tedy $\sigma_n \not\to 0$ pro $n \to +\infty$. Konvergence proto není na intervalu J stejnoměrná. Na intervalu K platí

$$\sigma_n = \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to \alpha+} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to \alpha+} \mathrm{e}^{-nx^2} = \mathrm{e}^{-n\alpha^2}$$

a následně tedy $\sigma_n \to 0$ pro $n \to +\infty$. Konvergence je proto na intervalu K stejnoměrná.

[8] 3. Určete pro která $b \in \mathbb{R}$ je definována funkce

$$F(b) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}x.$$

(Aneb zjistěte pro která $b \in \mathbb{R}$ uvedený integrál existuje a je konečný.) Pro tato b integrál spočtěte. *Postupy použité při řešení je nutné pečlivě zdůvodnit!*

Nápověda: $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Řešení:

Funkce $F(b)$ daná přepisem

$$F(b) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}x \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x\mathrm{e}^{x}}\, \mathrm{d}x$$

má dva rizikové body $x = 0$ a $x = +\infty$. (Měřitelnost integrandu je zřejmá neboť funkce $f(x, b)$ je pro libovolné b spojitá funkce proměnné x.) Pro $b \neq 0$ platí

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1-\mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{x \to 0+} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x} = b,$$

z čehož okamžitě vidíme, že pro $x \to 0+$ je integrand asymptoticky ekvivalentní funkci $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, což je na okolí nuly integrovatelná funkce, jak se lze přesvědčit kupříkladu přímým výpočtem. Integrál tedy bude (na okolí nuly) jistě konečný. Pro $b = 0$ navíc dostaneme přímým dosazením, že $F(b) = 0$. Chování integrandu u nuly tedy neklade žádné omezení na integrovatelnost.

Zbývá zjistit, jak se integrand chová v druhém rizikovém bodě, a sice pro $x \to +\infty$. Pro všechna $b > 0$, zřejmě platí

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

přičemž funkce $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ je integrovatelná (v okolí nekonečna) o čemž se lze přesvědčit kupříkladu přímým výpočtem. Definiční obor je tedy zjevně $b \in [0, +\infty)$. (Pokud by bylo b záporné, tak by od nějakého x platilo $\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{3}{2}}}\right| > \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ a funkce $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ není integrovatelná na okolí nekonečna.)

K výpočtu funkce $F(b)$ využijeme větu o derivaci integrálu podle parametru, která říká

Buď $f(x, b) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}$. Nechť platí

- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné b je diferencovatelná pro skoro všechna $x \in I$.
- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky měřitelná pro všechna $b \in J$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $g : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $b \in J$ platí $|\frac{\partial}{\partial b} f(x, b)| \leq g(x)$.
- Existuje $b_0 \in J$ tak, že funkce $f(x, b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I.

Pak je pro každé $b \in J$ funkce $f(x, b)$, jakožto funkce x, lebesguovsky integrovatelná na I, funkce

$$F(b) = \int_I f(x, b) \mathrm{d}x$$

je diferencovatelná na I a platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_I \frac{\partial}{\partial b} f(x, b) \mathrm{d}x.$$

V našem případě volme $I = (0, +\infty)$, $J = (0, +\infty)$. Diferencovatelnost funkce $f(x, b) = \frac{1-\mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{3}{2}}}$ podle proměnné b je zřejmá, měřitelnost podle proměnné x jsme diskutovali v úvodu, bod $b_0 \in J$, ve kterém má být funkce $f(x, b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I, nepochybně existuje, protože výše jsme dokonce zjistili, že $f(x, b)$ je lebesgueovsky integrovatelná pro libovolné b z definičního oboru.

Zbývá najít integrovatelnou majorantu pro derivaci

$$\frac{\partial}{\partial b} f(x, b) = \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Na okolí nuly, řekněme například pro $x \in (0, K)$, zjevně platí, že

$$\frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$$

naopak na intervalu $x \in (K, +\infty)$ a pro $b \in (\varepsilon, +\infty)$, kde $\varepsilon > 0$, platí

$$\frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon x}}{K^{\frac{1}{2}}}$$

kde funkce na pravé straně je ovšem lebesgueovsky integrovatelná na intervalu $(K, +\infty)$. Je-li tedy $I = (0, +\infty)$ a $J = (\varepsilon, +\infty)$, pak je funkce

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}, & x \in (0, K), \\ \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon x}}{K^{\frac{1}{2}}}, & x \in (K, +\infty), \end{cases}$$

hledaná integrovatelná majoranta. (Povšimneme si, že jsme v průběhu výpočtu pozměnili interval J. Hodnoty b nyní nebereme z intervalu $J = (0, +\infty)$, ale z intervalu $J = (\varepsilon, +\infty)$, kde ε je libovné kladné číslo, $\varepsilon > 0$. Na původním intervalu by se nám nepodařilo najít integraovatelnou majorantu nezávislou na parametru b.)

Pro funkci $F(b)$ jsme tedy obdrželi

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}x.$$

Integrál spočteme jednoduchou substitucí

$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}x. = \left| \begin{matrix} y = \sqrt{x} \\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| = 2\int_{y=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-by^2} \,\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{b}},$$

přičemž jsme použili integrál z nápovědy. Obdrželi jsme tedy diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \sqrt{\frac{\pi}{b}},$$

odkud integrováním podle proměnné b dostaneme

$$F(b) = 2\sqrt{\pi b} + C,$$

kde C je integrační konstanta.

Zbývá určit integrační konstantu C. Hodnota funkce $F(b)$ v bodě $b = 0$ je zřejmě $F(0) = 0$, odkud $C = 0$, celkem tedy

$$F(b) = 2\sqrt{\pi b},$$

kde $b \in [0, +\infty)$. Abychom ovšem tento obrat mohli uplatnit, potřebujeme se ujistit že $F(0) = \lim_{b \to 0+} F(b)$, přičemž na levé straně použijeme přímé dosazení do předpisu

$$F(b) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}x$$

a na pravé straně použijeme získaný vzorec $F(b) = 2\sqrt{\pi b} + C$.

O záměně limity a integrálu vypráví kupříkladu následující věta. (Použijeme ji na posloupnost $f_n(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{x^{\frac{3}{2}}}$.)

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x \in M$ k funkci f, aneb pro skoro všechna $x \in M$ platí $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro skoro všechna $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.

- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

První dva požadavky věty jsou jasně splněny, zbývá najít integrovatelnou majorantu. Pro $x \in (K, +\infty)$, kde K je kladné reálné číslo, nečiní nalezení integraovatelné majoranty žádné potíže,

$$\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

na okolí nuly, tedy pro $x \in (0, K)$ využijeme nerovnosti

$$\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{x^{\frac{3}{2}}}\right| = \left|\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\frac{\frac{x}{n}}{x^{\frac{3}{2}}}\right| = \left|\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right|\frac{1}{n}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \leq L\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Integrovatelná majoranta je tedy stejně jako v případě záměny derivace a integrálu definována po částech na intervalech $(0, K)$ a $(K, +\infty)$.

[8] 4. Spočtěte plošný obsah plochy S, která je dána jako hranice (povrch) tělesa M, přičemž těleso M je popsáno vztahem $M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ \frac{x^2+y^2}{H} < z,\ 0 < z < H \right\}$. ($H \in \mathbb{R}^+$ je parametr.)

Řešení:

Těleso M je zjevně rotační paraboloid, viz Obrázek 1. Hranici rozdělíme na dvě části – plášť a podstavu.

Parametrizace pláště je

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = \frac{1}{H}r^2, \end{cases}$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $r \in [0, H]$. Tečné vektory k ploše S jsou zřejmě

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2\frac{r}{H} \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Spočteme element plochy

$$\mathrm{d}S = \sqrt{g}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r,$$

kde

$$g = \det \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 + 4\frac{r^2}{H^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

Je tedy $\mathrm{d}S = r\sqrt{1 + 4\frac{r^2}{H^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, zbývá zintegrovat přes danou plochu

$$S_{\text{plášť}} = \int_S \mathrm{d}S = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{H} r\sqrt{1 + 4\frac{r^2}{H^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_{r=0}^{H} r\sqrt{1 + 4\frac{r^2}{H^2}}\mathrm{d}r$$

$$= \begin{vmatrix} u = 1 + 4\frac{r^2}{H^2} \\ \mathrm{d}u = \frac{8}{H^2}r\mathrm{d}r \end{vmatrix} = \frac{\pi}{4}H^2 \int \sqrt{u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\left(1 + 4\frac{r^2}{H^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{H} = \frac{\pi}{6}H^2\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Parametrizace podstavy je

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = H, \end{cases}$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $r \in [0, H]$. Tečné vektory k ploše S jsou zřejmě

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Spočteme element plochy

$$\mathrm{d}S = \sqrt{g}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r,$$

kde

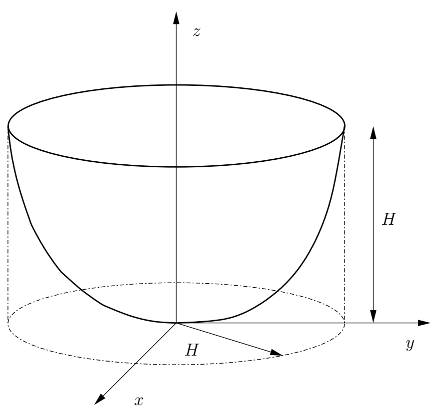
$$g = \det \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

Je tedy $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, zbývá zintegrovat přes danou plochu

$$S_{\text{podstava}} = \int_S \mathrm{d}S = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{H} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_{r=0}^{H} r\mathrm{d}r = \pi H^2.$$

Celkem tedy

$$S = S_{\text{plášť}} + S_{\text{podstava}} = \frac{\pi}{6}H^2\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right) + \pi H^2 = \frac{5}{6}\pi H^2\left(\sqrt{5} + 1\right).$$



Obrázek 1: Plocha S.

[8] 5. Uvažujte Hilbertův prostor $H =_{\mathrm{def}} L^2\left((0,2\pi)\right)$ vybavený standardním skalárním součinem

$$(u,v)_{L^2((0,2\pi))} =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{2\pi} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Uvažujte podprostor V, $V \subset H$, který je generován jako lineární obal funkcí

$$g_1(x) =_{\mathrm{def}} \sin x + \cos x,$$
$$g_2(x) =_{\mathrm{def}} \cos x + \sin\left(3x\right),$$

aneb

$$V =_{\mathrm{def}} \left\{ w \in H \,|\, \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \colon w(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) \right\},$$

a dále uvažujte funkci $f_m \in H$ definovanou předpisem

$$f_m(x) =_{\mathrm{def}} \sin\left(mx\right),$$

kde $m \in \mathbb{N}_0$. (Množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$ pro tyto účely tohoto příkladu chápeme včetně nuly, k symbolu $\mathbb{N}$ tedy přidáváme index nula, aby nedošlo k mýlce.)

a) Zjistěte zda jsou funkce g_1 a g_2 na sebe v daném skalárním součinu kolmé. Spočtěte normy funkcí $\|g_1\|_H$ a $\|g_2\|_H$, kde $\|\cdot\|_H$ značí standardní normu v prostoru H. (Tedy normu indukovanou příslušným skalárním součinem.) Pokud na sebe funkce g_1 a g_2 kolmé nejsou, najděte v prostoru V ortonormální bázi, to jest bázi tvořenou funkcemi, jejichž norma je rovná jedné a které jsou na sebe navzájem kolmé.

b) Zjistěte, pro která $m \in \mathbb{N}_0$ je $f_m \in V$.

c) Pro dané $k \in \mathbb{N}_0$ najděte nejlepší aproximaci funkce $f_k \in H$ v podprostoru V, aneb najděte funkci $h_k \in V$ takovou, že platí $\|f_k - h_k\|_H = \min_{l \in V} \|f_k - l\|_H$, kde $\|\cdot\|_H$ značí standardní normu v prostoru H. (Tedy normu indukovanou příslušným skalárním součinem.)

Řešení:

Všechny otázky zodpovíme pomocí skalárního součinu. Z teorie Fourierových řad si připomeneme, že pro $n, m \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin\left(mx\right)\sin\left(nx\right)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m, \end{cases}$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos\left(mx\right)\cos\left(nx\right)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m, n \neq 0, \\ 2\pi, & n = m = 0, \end{cases}$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin\left(mx\right)\cos\left(nx\right)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Spočteme skalární součin dle definice

$$(g_1, g_2)_{L^2((0,2\pi))} =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{2\pi} g_1(x)g_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{2\pi} \left(\sin x + \cos x\right)\left(\cos x + \sin\left(3x\right)\right)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{2\pi} \cos x \cos x\,\mathrm{d}x = \pi,$$

kde jsme využili výše uvedené vzorce. Ukázali jsme tedy, že funkce g_1 a g_2 na sebe *nejsou* kolmé. (Jejich skalární součin je nenulový.) Spočteme normy. Dle definice je

$$\|g\|_H =_{\mathrm{def}} \left[(g,g)_{L^2((0,2\pi))}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{x=0}^{2\pi} \left(g(x)\right)^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}},$$

v našem případě tedy

$$\|g_1\|_H = \left[\int_{x=0}^{2\pi} \left(\sin x + \cos x\right)^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{x=0}^{2\pi} \left(\sin^2 x + 2\sin x\cos x \cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$$

a dále

$$\|g_2\|_H = \left[\int_{x=0}^{2\pi} \left(\cos x + \sin\left(3x\right)\right)^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{x=0}^{2\pi} \left(\cos^2 x + 2\cos x \sin\left(3x\right) + \sin^2\left(3x\right)\right)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{1}{2}},$$

kde jsme využili výše uvedených vzorců pro výpočet integrálů ze součinů goniometrických funkcí. Ortonormální bázi najdeme kupříkladu prvním krokem Gramm–Schmidt ortogonalizačního procesu. Označme si hledanou ortonormální bázi jako $\{\widetilde{g_1}, \widetilde{g_2}\}$. První vektor můžeme volit jako patřičně normovaný vektor g_1, a druhý vektor získáme jako vektor g_2, od kterého odečteme jeho průmět do vektoru g_1 a výsledek patřičně nanormujeme, aneb

$$\begin{aligned}\widetilde{g_1} &= \frac{g_1}{\left\|g_1\right\|_H}, \\ \widetilde{g_2} &= \frac{g_2 - \left(g_2, \widetilde{g_1}\right)_{L^2((0,2\pi))} \widetilde{g_1}}{\left\|g_2 - \left(g_2, \widetilde{g_1}\right)_{L^2((0,2\pi))} \widetilde{g_1}\right\|_H}.\end{aligned}$$

V našem konkrétním případě je

$$\widetilde{g_1} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} (\sin x + \cos x)$$

a dále

$$g_2 - \left(g_2, \widetilde{g_1}\right)_{L^2((0,2\pi))} \widetilde{g_1} = \cos x + \sin(3x) - \pi \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sin x + \cos x}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \sin(3x),$$

odkud

$$\left\|g_2 - \left(g_2, \widetilde{g_1}\right)_{L^2((0,2\pi))} \widetilde{g_1}\right\|_H = \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Celkem proto

$$\widetilde{g_2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \sin(3x)\right].$$

Odpověď na druhou otázku získáme v rámci hledání odpovědi na třetí otázku. (Bude-li nejlepší aproximací f_k z prostoru V funkce f_k samotná, je jasné, že $f_k \in V$.) Bez dlouhého rozmýšlení ovšem můžeme okamžitě říci, že $f_0 \in V$. (Nulový prvek patří do jakéhokoliv podprostoru hodného svého jména.)

Z přednášky víme, že nejlepší aproximaci získáme ortogonální projekcí f na podprostor V. Ortogonální projekci lze znadno spočíst, pokud máme v prostoru V k dispozici ortonormální bázi. Naštěstí jsme takovou bázi právě sestrojili, jest $V = \operatorname{span}\{\widetilde{g_1}, \widetilde{g_2}\}$, kde

$$\begin{aligned}\widetilde{g_1} &=_{\text{def}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\sin x + \cos x], \\ \widetilde{g_2} &=_{\text{def}} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}\pi}} \left[\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \sin(3x)\right],\end{aligned}$$

a kde platí

$$\left(\widetilde{g_i}, \widetilde{g_j}\right)_{L^2((0,2\pi))} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Funkci h tedy hledáme jako ortogonální projekci, což znamená, že

$$\begin{aligned} h_k(x) = \left(f_k, \widetilde{g_1}\right)_{L^2((0,2\pi))} \widetilde{g_1}(x) + \left(f_k, \widetilde{g_2}\right)_{L^2((0,2\pi))} \widetilde{g_2}(x) &= \left[\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sin x + \cos x) \,\mathrm{d}x\right] \widetilde{g_2}(x) \\ &+ \left[\int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}\pi}} \left[\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \sin(3x)\right] \mathrm{d}x\right] \widetilde{g_2}(x) \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) \sin x \,\mathrm{d}x\right] \widetilde{g_1}(x) + \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}\pi}} \int_{x=0}^{2\pi} \sin(kx) \left[-\frac{1}{2} \sin x + \sin(3x)\right] \mathrm{d}x\right] \widetilde{g_2}(x) \\ &= \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \widetilde{g_1}(x) - \sqrt{\frac{\pi}{6}} \widetilde{g_2}(x), & k = 1, \\ \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \widetilde{g_2}(x), & k = 3, \\ 0, & k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 3\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Celkem tedy

$$h_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\sin x + \cos x] - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \sin(3x)\right] = \frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \sin x - \frac{1}{3} \sin(3x), & k = 1, \\ \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \sin(3x)\right] = \frac{1}{3} \cos x - \frac{1}{3} \sin x + \frac{2}{3} \sin(3x), & k = 3, \\ 0, & k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 3\}. \end{cases}$$

a $h_k = f_k$, aneb $f_k \in V$, platí zjevně pouze pro $k = 0$. V řeči původních vektorů g_1 a g_2 také můžeme psát

$$h_k(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}g_1 - \frac{1}{3}g_2, & k = 1, \\ -\frac{1}{3}g_1 + \frac{2}{3}g_2, & k = 3, \\ 0, & k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 3\}\,. \end{cases}$$