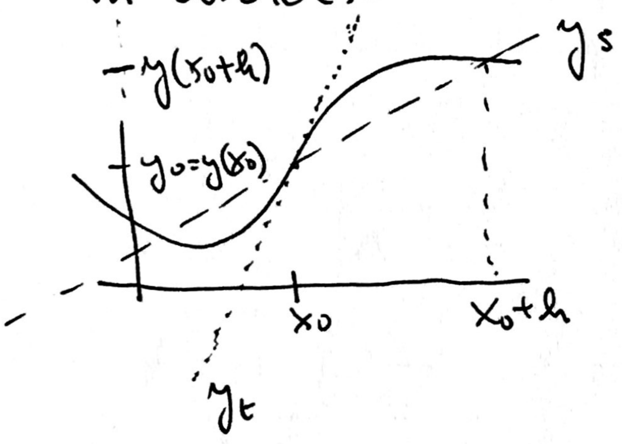
1.2. LIMITA A SPOJITOST

Definice limity tvoří základ předmětu matematická analýza. Jejímu porozumění je třeba věnovat zvýšenou pozornost. Trvalo takřka století od Newtona a Leibnize než-li matematika dospěla k přesnému uchopení a popsání pojmu limita. Pojem limity je všude kolem nás. Potřebujeme jej při sčítání nekonečných řad, pro výpočet ploch a objemů (vymezených funkcemi), pro určení tečen v bodech dané křivky, při hledání maximálních či minimálních (extremálních) hodnot, při stanovení okamžité rychlosti (zrychlení) částic či těles.

Uvažujme dvě úlohy. Mějme nejdříve křivku, která je v okolí bodu (x_0, y_0) popsána funkcí $y = y(x)$. Cílem je napsat (určit) rovnici tečny ke dané křivce v bodě (x_0, y_0), viz obrázek.



Sečna (přímka) procházející body $(x_0, y(x_0))$ a $(x_0+h, y(x_0+h))$ má tvar

$$\boxed{y_s(x) = y(x_0) + \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}(x - x_0)}$$

Tečna y_t je pak dána rovnicí

$$y_t(x) = y(x_0) + k(x - x_0), \text{ kde}$$

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}.$$

Podobně, částice pohybující se po křivce (trajektorii) $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ parametrizovanou časem, tj. $\vec{y} = \vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ má v čase t_0 okamžitou rychlost $\vec{v}(t_0)$ danou jako limitu podílu typu

$$\frac{\text{relativní vzdálenost}}{\text{relativní čas}} = \frac{\vec{y}(t_0+\Delta) - \vec{y}(t_0)}{\Delta t}. \quad \left[\leftarrow \text{výraz } \frac{0}{0} \right]$$

dráha / změna polohy

Tzn. $\vec{v}(t_0) = (y_1'(t_0), y_2'(t_0), y_3'(t_0)) = (\dot{y}_1(t_0), \dot{y}_2(t_0), \dot{y}_3(t_0))$

Uvažujme $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nebo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (tzn. reálné a komplexní funkce reálné proměnné), přičemž případ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lze vnímat jako speciální případ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (neboť $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) + i f_2(x)$)

Limita je číslo z $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$; v takovém případě mluvíme o <u>vlastní</u> limitě. Může se stát, že limita je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$, nebo ∞ ($f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$). Pak mluvíme o <u>nevlastní</u> limitě.

Pojem limity je <u>lokální</u> vlastnost, tzn. týká se chování funkce v okolí jediného bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$ mluvíme o limitě <u>ve vlastním bodě</u>, je-li $x_0 = +\infty$ nebo $x_0 = -\infty$ pak se jedná o limitu v <u>nevlastním bodě</u>.

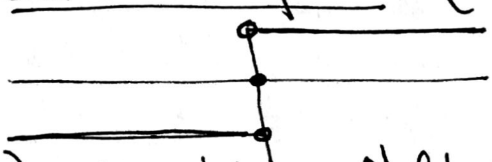
Pokud limita existuje (vlastní/nevlastní), pak je chování funkce v okolí $x_0 \in \mathbb{R}^*$ kontrolované. Pokud limita nebude existovat, pak je chování funkce v okolí uvažovaného bodu podezřelé.

<u>Příklady</u> ① $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Zajímá nás chování v okolí $a > 0$. Pokud x se blíží k a, pak x^2 se blíží k a^2
NEBOLI: $f(x)$ je "libovolně blízko" a^2, pokud x "dostatečně blízko" a.

② $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ $\quad D_f := \mathbb{R} \setminus \{a\}$ $\quad$ a $f(x) = x + a$ pokud $x \neq a$

Fce f není v a definována. To však pro pojem limity nevadí, neb zkoumáme chování v okolí a a pro x <u>blízká</u> a je $f(x)$ <u>blízká</u> $2a$.

③ $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ $\quad$ <u>znaménková funkce</u> (sign function)
FUNCTION



V okolí $x \neq 0$ se chová funkce jako fce konstantní ($+1$ nebo -1). Chování v okolí $x = 0$ je podezřelé.

④ $f(x) = \dfrac{1}{x - a}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Pro $x \neq a$ je chování v.k.
V okolí $x = a$ je chování ještě podezřelejší.

DÚ: Zkoumejte chování posledních dvou funkcí pro x jdoucí k 0 resp. k a zprava/zleva

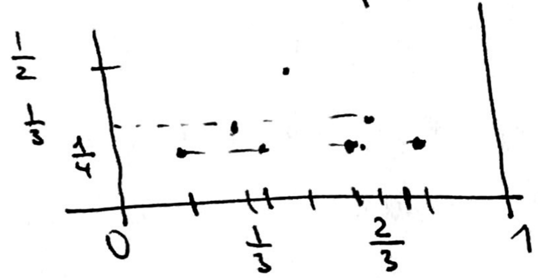
(5) <u>Dirichletova fce</u> $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{je-li } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Chování v okolí každého (tzn. libovolného) bodu je podezřelé, proč ?

(6) <u>Riemannova funkce</u> $R : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$

$$R(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q} \wedge x = \frac{p}{q} \quad p,q \text{ nesoudělná} \end{cases}$$



<u>MOTTO</u>: Těžko v Definici, lehko ve Větách
(Těžce na cvičišti, lehce na bojišti)

<u>Def.</u> (obecná definice limity) Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$). Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ (nebo $\mathbb{C}^*$) a $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že <u>A je limitou f pro x jdoucí k x_0</u>, píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že všechna x z prstencového δ-okolí x_0 se zobrazí do ε-ového okolí A:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \overset{\text{df.}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\underbrace{(\forall x \in P_\delta(x_0))\ f(x) \in U_\varepsilon(A)}_{\Updownarrow}$$

$$f[P_\delta(x_0)] \subset U_\varepsilon(A)$$

[V definici je schována implicitně podmínka, že $P_\delta(x_0) \subset D_f$.]

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\big([P_\delta(x_0) \subset D_f] \wedge [f(P_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(A)]\big)$$

[Omezíme se (až do odvolání) na vlastní limity ve vlastních bodech (pro jednoduchost a lepší pochopení)

Pak existuje přehršle ekvivalentních tvarů definice limity:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$$

$$\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|\le\varepsilon)$$

$$\iff (\exists \varepsilon_1>0)(\forall\, 0<\varepsilon\le\varepsilon_1)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$$

$$\iff (\exists K>0)(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})\,(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<K\varepsilon)$$

Tyto tvary občas využijeme v důkazech.

$\boxed{\text{Ad Př. 2}}$ Ukažme z definice, že $\lim_{x\to a} f(x) = 2a$.

Nepřítel nám dodá $\varepsilon>0$ malé, libovolné. Po dodání je toto ε pro nás pevné. K němu hledáme $\delta>0$ tak, aby platilo

(*) $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-2a|<\varepsilon$.

Avšak $f(x)=x+a$ pro $\forall x:\ 0<|x-a|<\delta$ a tak $|f(x)-2a| = |x-a|$.

Vidíme, že hledané δ lze zvolit $\delta=\varepsilon$ a pak (*) platí. ▨

(a nebo číslo menší než ε)

$\boxed{\text{Ad Př. 1}}$ Chceme ukázat, že $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$ $(a>0)$

pro jednoduchost (sudá fce)

Opět obdržíme $\varepsilon>0$ nepříjemně malé, ale pevné.

Hledáme $\delta>0$ tak, aby platilo

$$x\in(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\} \Rightarrow x^2=f(x)\in(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$$

Potoruj: $\quad x^2<a^2+\varepsilon \iff x\in(-\sqrt{a^2+\varepsilon}, \sqrt{a^2+\varepsilon})$

$\qquad\quad x^2>a^2-\varepsilon \iff x\in(-\infty, -\sqrt{a^2-\varepsilon})\cup(\sqrt{a^2-\varepsilon}, +\infty)$

NAKRESLI SI OBRÁZEK

Tedy:

je-li $x\in(\sqrt{a^2-\varepsilon}, \sqrt{a^2+\varepsilon})$ pak $x^2\in(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$

$\Updownarrow$

(•) je-li $x\in(a-a+\sqrt{a^2-\varepsilon},\ a-a+\sqrt{a^2+\varepsilon})$, pak $x^2\in(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$

Označme $\delta_1 := a-\sqrt{a^2-\varepsilon}$ a $\delta_2 := \sqrt{a^2+\varepsilon}-a$, pak

(•) $\iff$ je-li $x\in(a-\delta_1, a+\delta_2)$, pak $x^2\in(a^2-\varepsilon, a^2+\varepsilon)$ ▨

Hledané δ volím jako $\min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Pozn. $\min\{\delta_1,\delta_2\} = \delta_1$.

Věta 1 (O jednoznačnosti limity neboli o smysluplnosti/korektnosti definice limity)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\exists P_\delta(x_0) \subset D_f$. Pak existuje nejvýš jedna limita f v bodě x_0.

Dk) Sporem. Kdyby existovaly dvě limity A_1 a A_2, tak platí:

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = A_1$

(b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = A_2$

(c) $A_1 \neq A_2$

Položme $\varepsilon = \dfrac{|A_1 - A_2|}{\varepsilon}$.

Pak z (a) plyne: $\exists \delta_1 > 0$ tak, že $\forall x \in P_{\delta_1}(x_0)$ $|f(x) - A_1| < \varepsilon$

A z (b) plyne: $\exists \delta_2 > 0$ — " — $\forall x \in P_{\delta_2}(x_0)$ $|f(x) - A_2| < \varepsilon$

Pro $x \in P_{\delta_1}(x_0) \cap P_{\delta_2}(x_0)$:

$$0 < |A_1 - A_2| = |A_1 \underbrace{- f(x) + f(x)}_{=0} - A_2| \leq |f(x) - A_1| + |f(x) - A_2|$$

$$< 2\varepsilon = |A_1 - A_2|,$$

a z podtrženého plyne spor. ◪

Def. (Jednostranné limity) Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$). Nechť $A \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) a $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je limitou $f(x)$ pro x jdoucí k x_0 $\left\{\begin{matrix} \text{zprava} \\ \text{zleva} \end{matrix}\right\}$, píšeme $\left\{\begin{matrix} \lim_{x \to x_0+} f(x) \\ \lim_{x \to x_0-} f(x) \end{matrix}\right\}$,

jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna

$$\left\{\begin{matrix} x \in P^+_\delta(x_0) = (x_0, x_0 + \delta) \\ x \in P^-_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \end{matrix}\right\} \text{ platí } |f(x) - A| < \varepsilon$$

Symbolicky:

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = A \overset{df.}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in P^\pm_\delta(x_0))(|f(x) - A| < \varepsilon)$$

$\boxed{\text{Ad Př. 3}}$ $\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ a $\lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn} = -1$, což snadno ověříte z definice fce sgn a z definice jednostranné limity.

Q: Existuje $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$?

Odpověď dává (mimojiné) následující věta.

Věta 2 Platí: $\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \left(\lim_{x\to x_0+} f(x)=A\right) \wedge \left(\lim_{x\to x_0-} f(x)=A\right)$

Slovy: limita $f(x)$ pro $x\to x_0$ existuje a rovná se A právě když existují (jednostranné) limity $f(x)$ pro $x\to x_0+$ a pro $x\to x_0-$ a rovnají se A.

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ je jednodušší. ROZMYSLETE.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\varepsilon>0$ dáno, hledám δ. Z existence jednostranných limit však víme, že k danému $\varepsilon>0$ existují $\delta_1>0$ a $\delta_2>0$ tak, že

- $x\in(x_0,x_0+\delta_1) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$
- $x\in(x_0-\delta_2,x_0) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

Pro $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ máme: $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$,
Q.E.D. ■

$\boxed{\text{Ad Př. 3}}$ Ačkoliv $\lim_{x\to 0+}\operatorname{sgn} x$ a $\lim_{x\to 0-}\operatorname{sgn} x$ existují, tak $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ neexistuje, neboť $\lim_{x\to 0+}\operatorname{sgn} x \neq \lim_{x\to 0-}\operatorname{sgn} x$. ■

Vidíme, že limita fce vždy nemusí existovat. Výrok "limita $f(x)$ pro $x\to x_0$ existuje" znamená: $(\exists A\in\mathbb{C}\ (\mathbb{R}))(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))(f(x)\in U_\varepsilon(A))$

Negací získáme výrok "limita $f(x)$ pro $x\to x_0$ neexistuje", který má tvar:

(*) $(\forall A\in\mathbb{C}\ (\mathbb{R}))(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x\in P_\delta(x_0))\ \boxed{f(x)\notin U_\varepsilon(A)} \vee (x\notin D_f)$

$\boxed{\text{Ad Př. 4}}$ Ukažme, že $\lim_{x\to 1/2} D(x)$ neexistuje (neexistují ani $\lim_{x\to 1/2\pm} D(x)$).

Použijeme (*).

$\boxed{\text{Pro } A\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}}$, zvolme $\varepsilon<\min\{|A|,|A-1|\}$. Pak dokonce pro $\forall x\in\mathbb{R}$ platí $f(x)\notin U_\varepsilon(A)$ (neb $f(x)=0$ nebo $f(x)=1$).
Je-li $A=0$ nebo $A=1$, pak zvolme $\varepsilon\in(0,\frac12)$. Je-li $A=0$, pak v libovolném $P_\delta(\frac12)$ leží $x_r\in\mathbb{Q}$ pro které však $f(x_r)=1\notin U_\varepsilon(0)$. Podobně, je-li $A=1$, pak v libovolném $P_\delta(\frac12)$ leží iracionální číslo $x_{ir}\in P_\delta(\frac12)$ pro které $f(x_{ir})=0\notin U_\varepsilon(1)$.

$\boxed{\text{Ad Př. 5}}$ Q: Existuje $\lim_{x\to 1/2} R(x)$?

Řešitelé mohou odevzdat zpracované čitelné řešení přednášejícímu.

Věta 3 (Jak počítat limitu komplexní fce) Buď $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. $[f(x) = (f_1(x) + i f_2(x))]$

Platí: $\lim_{x\to x_0} f(x) = A_1 + iA_2 \iff \left(\lim_{x\to x_0} f_1(x) = A_1\right) \wedge \left(\lim_{x\to x_0} f_2(x) = A_2\right)$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ $\varepsilon > 0$ dáno.

Víme: $(\exists \delta > 0)(\forall x \in P_\delta(x_0))\ \underbrace{|(f_1(x) - A_1) + i(f_2(x) - A_2)|_{\mathbb{C}}}_{=\,|f(x)-A|_{\mathbb{C}}} < \varepsilon$

Tvrzení plyne ze skutečnosti

$$\left.\begin{matrix}|z_1|\\ |z_2|\end{matrix}\right\} \le \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = |z|_{\mathbb{C}}, \quad \text{což implikuje} \quad \begin{matrix}|f_1(x) - A_1| < \varepsilon \\ |f_2(x) - A_2| < \varepsilon\end{matrix}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Nyní potřebujeme odhadnout $|f(x) - A|_{\mathbb{C}}$ pomocí $|f_1(x) - A_1|$ a $|f_2(x) - A_2|$.

Avšak

$$\begin{aligned}|f(x) - A|_{\mathbb{C}} &= |(f_1(x) - A_1) + i(f_2(x) - A_2)|_{\mathbb{C}} \\ &\le |(f_1(x) - A_1)|_{\mathbb{C}} + |i(f_2(x) - A_2)|_{\mathbb{C}} \\ &= |f_1(x) - A_1| + |f_2(x) - A_2|\end{aligned}$$ ∎

Proč tato nerovnost stačí k důkazu implikace?

Věta 4 Buď $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Pak $\lim |f(x)|_{\mathbb{C}} = A$

Dk plyne z nerovnosti $\left|\, |f(x)|_{\mathbb{C}} - |A|_{\mathbb{C}} \right| \le |f(x) - A|_{\mathbb{C}}$
viz Tvrzení 12 a 14. ∎

Definice Buď $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že
f je omezená na A $\equiv (\exists K > 0)(\forall x \in A)\ |f(x)|_{\mathbb{C}} \le K$
(všechny funkční hodnoty $f(x)$ pro $x \in A$ leží v kouli o poloměru K)

Následující dvě věty říkají, zhruba řečeno, že pokud má f v x_0 limitu, pak se chová v okolí x_0 kulturně.

Věta 5 Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ má v x_0 limitu, pak existuje $P_\delta(x_0)$ tak, že f je omezená na $P_\delta(x_0)$. Neboli

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{C} \Rightarrow (\exists K > 0)(\exists P_\delta(x_0))(\forall x \in P_\delta(x_0))\ |f(x)|_{\mathbb{C}} \le K.$$

Dk K $\varepsilon = 1$ $\exists P_\delta(x_0)$ tak, že $\forall x \in P_\delta(x_0)$ $|f(x) - A|_{\mathbb{C}} < 1$. Pak

$$|f(x)|_{\mathbb{C}} = |f(x) - A + A|_{\mathbb{C}} \underset{\Delta\text{-ner.}}{\le} |f(x) - A|_{\mathbb{C}} + |A|_{\mathbb{C}} < |A|_{\mathbb{C}} + 1 =: K,$$

což dává tvrzení. ∎

Věta 6 Buď $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$. Pak existuje $P_\delta(x_0)$: $\forall x\in P_\delta(x_0)$ je $|f(x)|_{\mathbb{C}} \geq \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2} > 0$.

Dk: k $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ $(\exists \delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))$ je $|f(x)-A|_{\mathbb{C}} < \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2}$.

Avšak, $|f(x)-A|_{\mathbb{C}} \geq \left||f(x)|_{\mathbb{C}} - |A|_{\mathbb{C}}\right| = \pm\left(|f(x)|_{\mathbb{C}}-|A|_{\mathbb{C}}\right)$ speciálně

$$|f(x)-A|_{\mathbb{C}} \geq |A|_{\mathbb{C}} - |f(x)|_{\mathbb{C}}$$

Odtud $|f(x)| \geq |A|_{\mathbb{C}} - |f(x)-A|_{\mathbb{C}} \geq |A|_{\mathbb{C}} - \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2} = \frac{|A|_{\mathbb{C}}}{2}$. ▨

Věta 7 (o limitě $+,-,\cdot,\div$) Buď $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$.
Pak platí:

(α) $\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = A\pm B$

(β) $\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) = AB$

(γ) Je-li $B\neq 0$, pak $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

[Tvrzení (α),(β),(γ) obsahují dvě informace: (i) limity součtu, rozdílu, součinu a podílu existují, a (ii) víme i čemu se rovnají.

Dk $\boxed{\text{Ad }(\alpha)}$ $|f(x)+g(x)-(A+B)| = \underbrace{|f(x)-A|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x)-B|}_{\frac{\varepsilon}{2}}$

$\boxed{\text{Ad }(\beta)}$

$$|f(x)g(x)-AB| = |f(x)(g(x)-B) + (f(x)-A)B|$$
$$\leq |f(x)(g(x)-B)| + |(f(x)-A)B|$$
$$\leq \underbrace{|f(x)|}_{\leq K}\,\underbrace{|g(x)-B|}_{\frac{\varepsilon}{2K}} + \underbrace{|f(x)-A|}_{\frac{\varepsilon}{2|B|}}\,|B| < \varepsilon$$

dle V5 $\to \leq K$

(z $\lim g(x)=B$) (z $\lim f(x)=A$)

$x\in P_{\delta_1}(x_0)$ $x\in P_{\delta_2}(x_0)$ $x\in P_{\delta_3}(x_0)$

$\boxed{\text{Ad }(\gamma)}$ Dle (β) stačí ukázat:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right| = \left|\frac{g(x)-B}{g(x)B}\right| = \frac{|g(x)-B|}{|g(x)|\,|B|} \leq \frac{2}{|B|^2_{\mathbb{C}}}\underbrace{|g(x)-B|_{\mathbb{C}}}_{<\frac{\varepsilon|B|^2_{\mathbb{C}}}{2}} < \varepsilon.$$

Dle V6 totiž víme, že $|g(x)|_{\mathbb{C}} \geq \frac{|B|_{\mathbb{C}}}{2}$ na jistém okolí x_0

a existence $\lim g(x) = B$. ▨

Příklad Z kontroly fcí $x^m, \frac{1}{x^m}$, pozorujeme, že z vlastnosti

$\lim_{x\to a} x = a$ (zkuste si nadále dokázat/ověřit + definice)

ve spojení s větou o limitě součinu platí

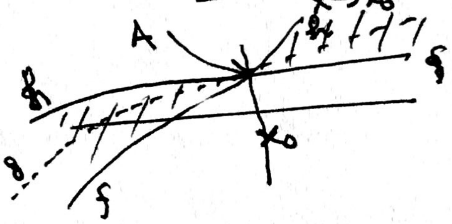
$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x\cdot x = \lim_{x\to a} x \lim_{x\to a} x = a\cdot a = a^2$$ a obecněji

$$\lim_{x\to a} x^m = a^m \quad \text{a} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ a\neq 0}} x^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Věta 8 (sendvičové tvrzení o dvou strážnících) Buď $x_0\in\mathbb{R}$ a $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takové, že

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall x\in P_\delta(x_0)$$

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$. Pak $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$



Q: Proč jsou zobrazení f,g,h do $\mathbb{R}$ (a nikoliv do $\mathbb{C}$)?

Dk Víme

$$A-\varepsilon \le f(x) \le A+\varepsilon \quad \forall x\in P_{\Delta_1}(x_0)$$
$$A-\varepsilon \le h(x) \le A+\varepsilon \quad \forall x\in P_{\Delta_2}(x_0)$$

Pro $x\in P_\delta(x_0)\cap P_{\Delta_1}(x_0)\cap P_{\Delta_2}(x_0)$:

$$A-\varepsilon \le f(x) \le g(x) \le h(x) \le A+\varepsilon \Rightarrow |g(x)-A|<\varepsilon \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Př. 6}}$ Víme, že $\lim_{x\to x_0} D(x)$ neexistuje pro libovolné x_0. Avšak

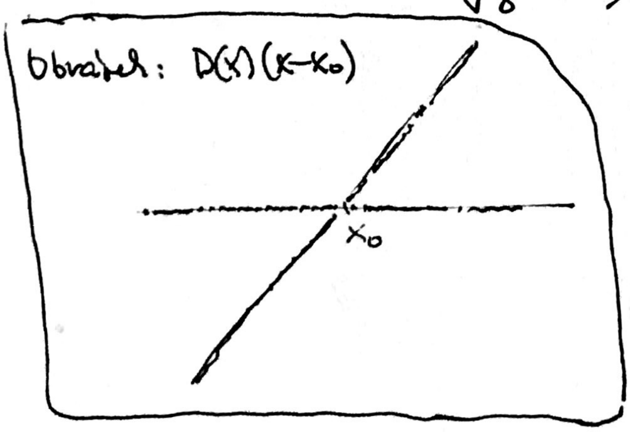
$$\lim_{x\to x_0} D(x)(x-x_0) = 0.$$

Vskutku: $-|x-x_0| \le D(x)(x-x_0) \le |x-x_0|$

pro $x\to x_0$: $-|x-x_0| \to 0$, $|x-x_0| \to 0$

$$\underbrace{}$$

$$V8 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} D(x)(x-x_0) = 0.$$



Uvažujme $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\,(\mathbb{R})$. Nechť
$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ a $\lim_{y\to A} g(y) = B$.
Následující příklad ukazuje, že tyto předpoklady zjistí nezaručují
aby $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B$.

<u>Příklad 7</u> Buď $f(x) = D(x)(x-x_0)$ a $g(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y=0 \\ y^2 & \text{pro } y\neq 0 \end{cases}$

Pak $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$

ale $\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x)$ <u>neexistuje</u> neboť v libovolném $P_\delta(x_0)$

- existují body, kde $g(f(x)) = 1$ $(x\in\mathbb{Q})$
- existují body, kde $g(f(x)) = 0$ $(x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$

Q: K zamyšlení: které fce to kazí? g nebo f?

<u>Věta 9</u> (1. věta o limitě složené fce) Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.
<u>Nechť:</u> (i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$; (ii) $\lim_{y\to A} g(y) = B$ a (iii) $(\exists P_{\delta^*}(x_0))(\forall x\in P_{\delta^*}(x_0))$ $f(x)\neq A$

Pak $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B$

Dk: Chceme ukázat, že
$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ g(f(x))\in U_\varepsilon(B)$.

Přitom víme:
(1) $(\forall\varepsilon>0)(\exists\Delta>0)(\forall y\in P_\Delta(A))\ g(y)\in U_\varepsilon(B)$
(2) $(\forall\Delta>0)(\exists\tilde\delta>0)(\forall x\in P_{\tilde\delta}(x_0))\ f(x)\in U_\Delta(A)$
(3) $(\exists\delta^*>0)(\forall x\in P_{\delta^*}(x_0))\ f(x)\neq 0$

Z (2) a (3) však plyne volbou $\delta := \min\{\tilde\delta, \delta_*\}$
(4) $(\forall\Delta>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in P_\delta(x_0))\ f(x)\in P_\Delta(A)$
což ve spojení s (1) dává výrok, který jsme chtěli ukázat.