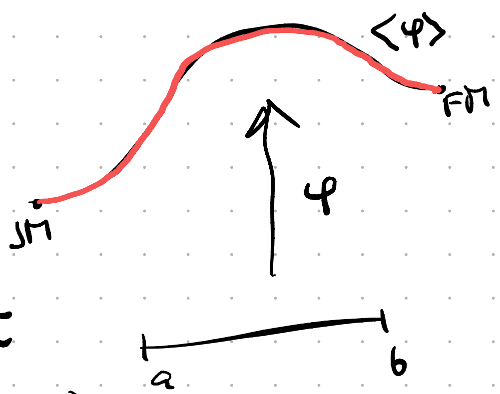
4. KŘIVKOVÝ & PLOŠNÝ INTEGRÁL

↳ nejde o konstrukci nových typů integrálů ve smyslu
Riemann, Newton, Lebesgue, ...
Kurzweil-Henstock, ...

↳ chceme pochopit jak využít **Lebesgueův integrál** k výpočtu integrálu na křivkách, plochách či jejich zobecněních: k-plochy v d-rozměrném prostoru, $d \in \mathbb{N}$ a $1 \leq k \leq d$ (je-li $k = d$ pak se jedná o klasický Lebesgueův integrál)

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Def. **Křivka** $\varphi : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$



Def. **Jednoduchá křivka**:

- $\varphi : (a,b) \xrightarrow{\text{na}} \langle\varphi\rangle$ prostě
- Existuje $\varphi'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

---

[1] **Kř. $\int$ 1. druhu**

značení $\int_{\langle\varphi\rangle} f \, ds$ kde $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ skalár

význam $f \equiv 1$ ... délka křivky

$f \equiv \varrho \geq 0$ ... hmotnost "drátu" popsaného křivkou $\langle\varphi\rangle$ s hustotou ϱ

[2] **Kř. $\int$ 2. druhu**

značení $\boxed{\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds}} = \int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{t} \, ds$

$\vec{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$\vec{ds} = \vec{t} \, ds$

$\uparrow$ tečný vektor podél křivky $\langle\varphi\rangle$

význam: práce potřebná k překonání síly $\vec{f}$ působící proti pohybu na hmotný bod pohybující se podél křivky φ.

? Jak křivkové $\int$ počítat ?

Odpověď: Motivování odvození vzorečku pro délku křivky

1. druhu

$$\int_{\langle\varphi\rangle} 1\, ds = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_d'(t))^2}\, dt$$

$\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^d$

$(\varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))$

$$= \int_a^b \left|\vec{\varphi}'(t)\right|_2 dt$$

(1)

$$\int_{\langle\varphi\rangle} f\, ds \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(\vec{\varphi}(t)) \left|\vec{\varphi}'(t)\right|_2 dt$$

2. druhu

$$\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{t}\, ds \overset{(1)}{=} \int_a^b \vec{f}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \frac{\vec{\varphi}'(t)}{|\varphi'(t)|_2} |\varphi'(t)|_2\, dt$$

$\frac{\vec{\varphi}'(t)}{|\varphi'(t)|_2} = \vec{t}$

(2)

$$\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds} \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \vec{f}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)\, dt$$

$\boxed{\text{KŘIVKY v } \mathbb{R}^d}$ upřesnění pojmů

KŘIVKA $\varphi: I \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} \mathbb{R}^d$ $(d>1)$; $\langle\varphi\rangle$ obraz křivky v $\mathbb{R}^d$

interval

C^1-KŘIVKA křivka φ taková, že $\varphi \in C^1(I)$

Regulární křivka C^1-křivka, kde $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

$\vec{\varphi}'(t) \neq \vec{0}$

JEDNODUCHÁ KŘIVKA křivka $\varphi \in C(I)$ a platí:

BUĎ φ je prostá na I

NEBO $\boxed{I=\langle a,b\rangle}$ φ je prostá na $\langle a,b)$ nebo $(a,b\rangle$ a φ^{-1} je spojité na $\langle\varphi\rangle$

UZAVŘENÁ KŘIVKA křivka, kde $I=\langle a,b\rangle$ a $\varphi(a)=\varphi(b)$

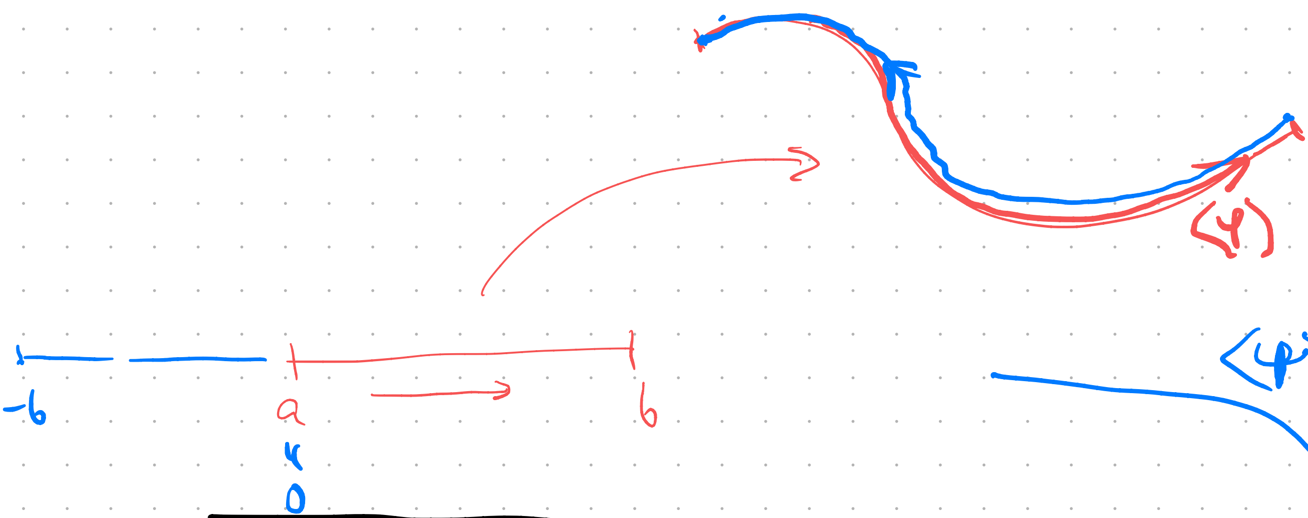
JORDANOVA KŘIVKA Jednoduchá a uzavřená křivka

OPAČNÁ KŘIVKA Pro $\varphi: I \to \mathbb{R}^d$ definujeme

opačnou křivku $\ominus\varphi: -I \to \mathbb{R}^d$ předpisem

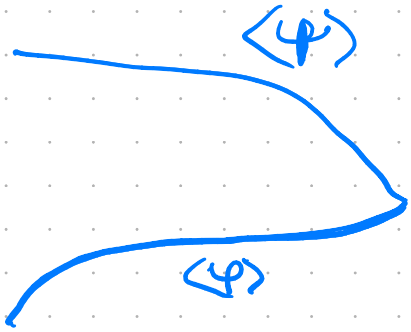
$-\langle\varphi\rangle$

$$\ominus\varphi(t) := \varphi(-t)$$



SOUČET KŘIVEK φ, ψ

$\varphi \oplus \psi$



Závislost křivkových $\int$ na změně orientace

- $$\int_{\langle \ominus\varphi\rangle} \vec{f}\cdot d\vec{s} \overset{\text{def}}{=} \int_{-\beta}^{-\alpha} \vec{f}\left(\ominus\vec{\varphi}(s)\right)\cdot\left(\ominus\vec{\varphi}\right)'(s)\,ds \qquad {}' = \frac{d}{ds}$$

$\varphi : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^d$

$\ominus\varphi : (-\beta,-\alpha) \to \mathbb{R}^d$

def. opačné křivky

$$= -\int_{-\beta}^{-\alpha} \vec{f}\left(\vec{\varphi}(-t)\right)\cdot\vec{\varphi}'(-t)\,dt \qquad {}' = \frac{d}{dt}$$

řetízkové pravidlo

$$\overset{\tau=-t}{=} \int_{\beta}^{\alpha} \vec{f}\left(\vec{\varphi}(\tau)\right)\cdot\vec{\varphi}'(\tau)\,d\tau$$

$$\underset{\text{otočení mezí}}{=} -\int_{\alpha}^{\beta} \vec{f}\left(\vec{\varphi}(\tau)\right)\cdot\vec{\varphi}'(\tau)\,d\tau = -\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

- Sami: $$\int_{\langle\ominus\varphi\rangle} f\,ds = \int_{\langle\varphi\rangle} f\,ds$$

Příklady ① Spočtěte $\int_{\langle\varphi\rangle} (x^2+y)\,ds$, kde $\varphi(t) = (1-t, 1+t)$, $t\in[0,1]$

Řeš. $\underline{\text{Int. 1. druhu.}}$

$f(x,y) := x^2+y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\varphi'(t) = (-1,1)$

$|\varphi'(t)|_2 = \sqrt{2}$

Tedy

$$\int_{\langle\varphi\rangle} (x^2+y)\,ds = \int_0^1 \underbrace{\left\{(1-t)^2 + (1+t)\right\}}_{f(\varphi(t))} \underbrace{\sqrt{2}}_{|\varphi'(t)|_2}\,dt$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \left(2-t+t^2\right)dt = \underline{\underline{\frac{11\sqrt{2}}{6}}}$$

② Spočtěte $I := \int_{\langle\varphi\rangle} x\,dx - y\,dy$ kde $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$.

Řeš: $\vec{f}(x,y) = (x,-y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\underbrace{x\,dx - y\,dy}_{\vec{f}\cdot\vec{ds}} = \vec{f}(x,y)\cdot(dx,dy)$$

$$\boxed{\vec{ds} = (dx,dy)}$$

tečný vektor

$$\boxed{\vec{t} = \varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)}$$

$\Downarrow$

Def. 2. druhu:

$$I = \int_0^\pi \vec{f}(\cos t, \sin t)\cdot\vec{t}\,dt$$

$$= \int_0^\pi (\cos t, -\sin t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt$$

$$= -2\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt = 0$$

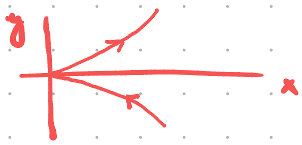
Pozorování 1) Stejnou křivku mohu popsat různou parametrizací:

- $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ $t\in(-\pi,\pi)$, $t\in(0,4\pi)$
  $\Rightarrow \varphi'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq 0$ $\forall t\in\mathbb{R}$
- $\varphi(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$ $t\in(-\pi,\pi)$
  $\Rightarrow \varphi'(t) = (-2t\sin t^2, 2t\cos t^2) \neq 0 \iff t\neq 0$
  v $t=0$ se mění směr pohybu

2) **Pozor!** $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ je C^∞-křivka, ale nepopisuje hladkou křivku

$\varphi'(t) = (2t, 3t^2) \neq 0 \iff t\neq 0 \iff (x,y)\neq(0,0)$

- $x = t^2$, $y = t^3$ a $t>0 \Rightarrow y = x^{3/2}$
- —||— a $t<0 \Rightarrow y = -x^{3/2}$



Platí tvrzení: Křivkový integrál nezávisí na volbě regulární parametrizace.

Je-li $\boxed{k=2}$ a $\boxed{d=3}$ tak zavádíme

plošný integrál

Motivováni popisem sférických a cylindrických souřadnic definujeme plochu v $\mathbb{R}^3$ a její parametrizaci takto:

Def. Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^3$ je regulární plocha

$\equiv$ existuje-li zobrazení $\varphi : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ takové
$I = (a,b)\times(\alpha,\beta)$

$\boxed{\varphi}$ regulární parametrizace plochy S

- $\varphi(I) = S$
- $\varphi \in C^1(I)$
- φ je prosté
- $D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{pmatrix}$ má ve všech bodech I hodnost 2.

$\vec{\varphi}(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \varphi_3(x,y))$

$\vec{t}$ $\vec{t}$

Zavedení plošných integrálů

[1] Plošný integrál 1. druhu

$$\int_S f\,dS \qquad \text{kde } f \text{ je skalár}$$

$S = \langle \varphi(I) \rangle$

význam: $f = 1 \Rightarrow$ obsah plochy S

$f = \varrho \Rightarrow$ hmotnost plochy S

[2] Plošný integrál 2. druhu

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} \qquad \text{kde } \vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\| $$

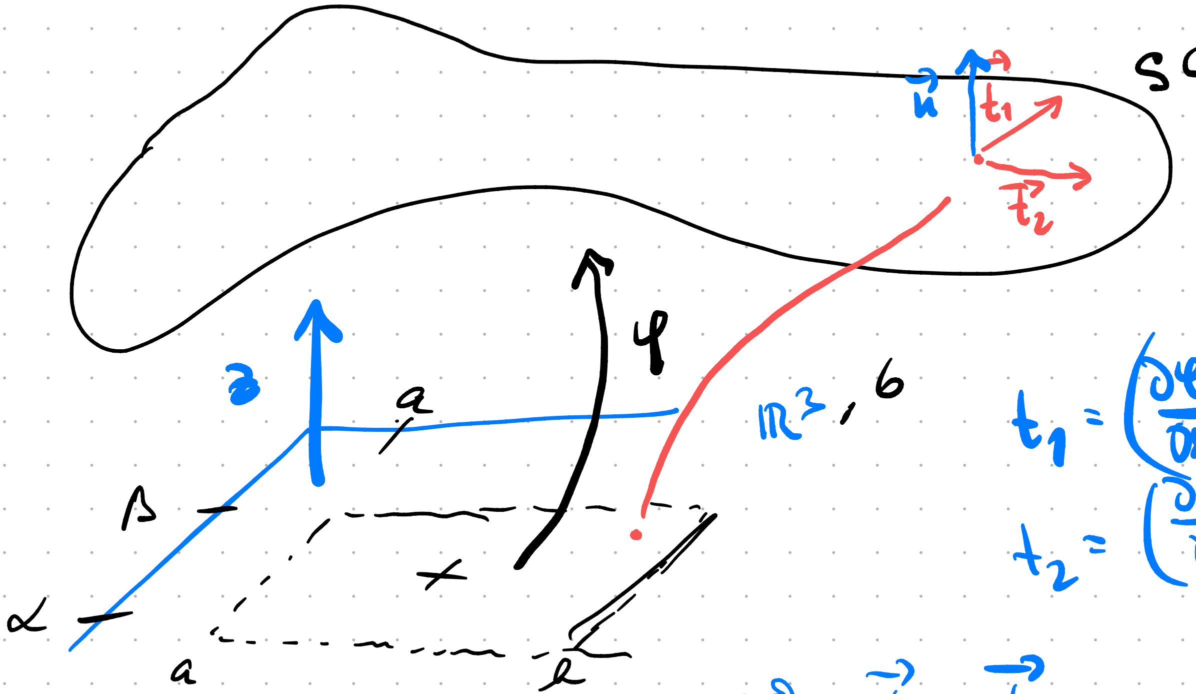
$$\int_S \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$$

převod na plošný integrál 1. druhu

význam: tok veličiny $\vec{f}$ přes plochu S

Q: Jak plošné int. počítat?

$S \subset \mathbb{R}^3$



$$t_1 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\right)$$

$$t_2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}\right)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{t}_1 \times \vec{t}_2}{|\vec{t}_1 \times \vec{t}_2|_2}$$

"Motivace" $\quad \int_S dS = \int_I \sqrt{1 + |\nabla z|^2}$

$\varphi : (x,y) \longmapsto (x, y, z(x,y))$ plocha generovaná fcí jako graf funkce $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 =$$

$$= \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) \Rightarrow \vec{V}$$

velikost $\vec{V} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + |\nabla z|^2}$

Tedy

$\boxed{\text{1. DRUHU}}$

$$\int_S f\,dS \overset{def}{=}_{(\mathcal{L})} \int_I f(\vec{\varphi}(x,y)) \left|\underbrace{\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}}_{\vec{t}} \times \underbrace{\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}}_{\vec{r}}\right| dx\,dy$$

$\boxed{\text{2. DRUHU}}$

$$\int_S \vec{f}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{f}\cdot\vec{n}\,dS = \int_I \vec{f}(\varphi(x,y))\cdot \frac{\vec{t}_{(x,y)}\times\vec{r}_{(x,y)}}{\cancel{|\vec{t}_{(x,y)}\times\vec{r}_{(x,y)}|}}\cancel{|\vec{t}_{(x,y)}\times\vec{r}_{(x,y)}|}\,dx\,dy$$

$$= (\mathcal{L})\int_I \vec{f}(\vec{\varphi}(x,y))\cdot\left(\underbrace{\frac{\partial\vec{\varphi}(x,y)}{\partial x}}_{\vec{t}(x,y)}\times\underbrace{\frac{\partial\vec{\varphi}(x,y)}{\partial y}}_{\vec{r}(x,y)}\right)dx\,dy$$

$\boxed{\text{Pozorování}}$ Počítejme $|\vec{t}\times\vec{r}|$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{t}\times\vec{r}|^2 = (t_2r_3 - t_3r_2,\ t_3r_1 - t_1r_3,\ t_1r_2 - t_2r_1)\cdot(\qquad)$$

$$= t_2^2r_3^2 + t_3^2r_2^2 + t_3^2r_1^2 + t_1^2r_3^2 + t_1^2r_2^2 + t_2^2r_1^2$$
$$- 2t_2t_3r_2r_3 - 2t_1t_3r_1r_3 - 2t_1t_2r_1r_2$$
$$= (t_1^2+t_2^2+t_3^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2) - (t_1r_1+t_2r_2+t_3r_3)^2$$
$$= |\vec{t}|^2|\vec{r}|^2 - (\vec{t}\cdot\vec{r})^2$$
$$= \det\begin{pmatrix} |\vec{t}|^2 & \vec{t}\cdot\vec{r} \\ \vec{t}\cdot\vec{r} & |\vec{r}|^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{t}\cdot\vec{t} & \vec{t}\cdot\vec{r} \\ \vec{r}\cdot\vec{t} & \vec{r}\cdot\vec{r} \end{pmatrix}$$

kvadrát velikosti „normálového" vektoru je roven determinant matice 2×2

Zobecnění $\vec{t}_1,\dots,\vec{t}_k$ k-vektorů v $\mathbb{R}^d$, $1\le k<d$,

kde $(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b}$

Matice

k-řádků

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (\vec{t}_1,\vec{t}_1) & (\vec{t}_1,\vec{t}_2) & \cdots & (\vec{t}_1,\vec{t}_k) \\ (\vec{t}_2,\vec{t}_1) & (\vec{t}_2,\vec{t}_2) & \cdots & (\vec{t}_2,\vec{t}_k) \\ \vdots & & & \\ (\vec{t}_k,\vec{t}_1) & (\vec{t}_k,\vec{t}_2) & \cdots & (\vec{t}_k,\vec{t}_k) \end{pmatrix}}_{k\text{-sloupců}}$$

Gramova matice

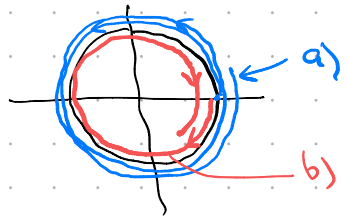
Determinant Gramovy matice je to správné zobecnění $|\vec{t}_1 \times \vec{r}|$ pro zobecněné k-plochy v $\mathbb{R}^d$
$k>2$, $d>3$

Př. Buď $I := \int_{\partial B_1(0)\subset\mathbb{R}^2} x\,dy - y\,dx = \int_{\partial B_1(0)} (-y,x)\cdot(dx,dy)$ $\qquad \vec{f}(x,y) = (-y,x)$

a uvaž $\boxed{k\in\mathbb{N}}$

a) $\varphi: (0,2k\pi) \xrightarrow{\text{na}} \partial B_1(0)$: $t \longmapsto (\cos kt, \sin kt)$

b) —— || —— : $t \longmapsto (\cos t, -\sin t)$



Výpočet

Ad a) $I = \int_0^{2k\pi} (-\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt = 2k\pi$

Ad b) $I = \int_0^{2k\pi} (\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, -\cos t)\,dt = -2k\pi$

Vidíme, že výsledek záleží na "počtu oběhnutí" a orientaci. Ukazuje se, že tohle jsou jediné podezřelé situace, na které je třeba dávat pozor.

Malinko obecněji o regulárních plochách dimenze k v $\mathbb{R}^d$

Def. $S \subseteq \mathbb{R}^d$ je regulární plocha dimenze k

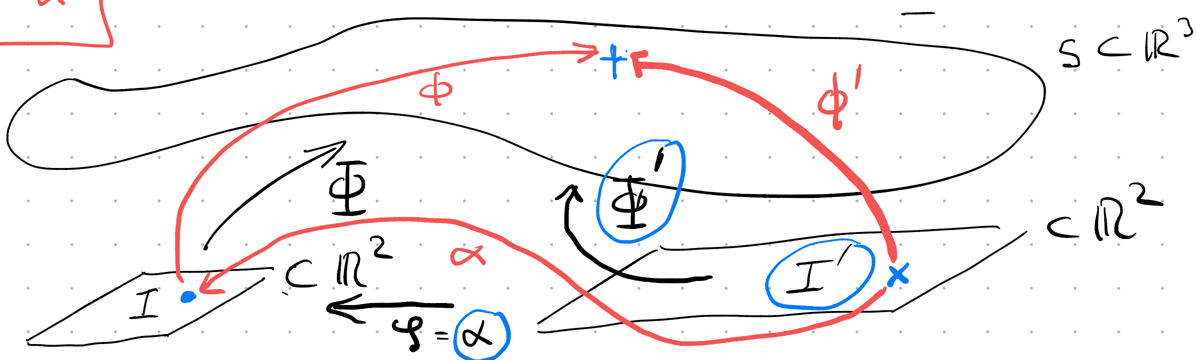
$\overset{\text{def}}{\equiv}$ $\exists\, I \subseteq \mathbb{R}^k$ a $\exists\, \Phi: I^\circ \to \mathbb{R}^d$ taková, že

- Φ je hladké ($\Phi \in C^\infty(I^\circ)$ nebo $\Phi \in C^1(I^\circ)$)
- $\Phi(I) = S$
- Φ je prosté
- $\dfrac{\partial(\Phi_1,\dots,\Phi_d)}{\partial(u_1,\dots,u_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_d}{\partial u_1} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_k} & \cdots & \frac{\partial \Phi_d}{\partial u_k} \end{pmatrix}$ má hodnost k všude v I°.

d sloupců
k řádků

Φ je regulární parametrizace plochy S

$\boxed{\phi' = \phi \circ \alpha}$



Def $\varphi: I' \to I$, kde $I, I' \subset \mathbb{R}^k$ otevřené
je *difeomorfismus* $\overset{def}{\equiv}$ $\varphi: I' \to I$ je
- prosté
- na
- hladké (C^1 nebo C^∞)
- φ^{-1} je hladké.

$\boxed{\text{KONEČNÍ: Věta 8.31}}$

Def • Dvě *parametrizace* ϕ, ϕ', kde $\Phi: \underset{\subset \mathbb{R}^k}{I} \to \mathbb{R}^d$, $\Phi(I) = S$
$\phi': I' \to \mathbb{R}^d$, $\phi(I') = S$

jsou *souhlasně orientované* $\equiv$ $\exists\, \alpha: I' \to I$ difeomorfismus
tak, že $\det J_\alpha > 0$ a
$\phi' = \phi \circ \alpha$

$$J_\alpha = \frac{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}{\partial(u_1', \dots, u_k')}$$

• Pokud $\exists\, \alpha: I' \to I$ difeomorfismus tak, že $\phi' = \phi \circ \alpha$ a $\det J_\alpha < 0$, pak ϕ, ϕ' jsou *nesouhlasně orientované*

$\boxed{\text{Platí Tvrz.}}$ Existují právě dvě třídy ekvivalence regulárních parametrizací reg. ploch dim. k.

Def. • S je *orientovaná plocha* $\equiv$ pokud S je reg. plocha dim k a k S je přiřazena jedna z tříd ekvivalence.

Jakékoliv dvě parametrizace z této třídy jsou dle definice *kladně orientované* parametrizace, píšeme $\phi \sim \phi'$

• Je-li S orientovaná plocha, pak $-S$ nebo $\ominus S$ označuje tutéž plochu opatřenou druhou třídou ekvivalentních reg. ploch.

Př.
$$S = \phi(t, \theta) = (\cos t \cos\theta, \sin t \cos\theta, \sin\theta) : \underbrace{(0, 2\pi) \times \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)}_{I} \to \mathbb{R}^3$$
$$= \Phi(t, \theta) = \phi(\theta, t) = (\cos\theta \cos t, \sin\theta \cos t, \sin t) : \underbrace{\left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)}_{I'} \to \mathbb{R}^3$$

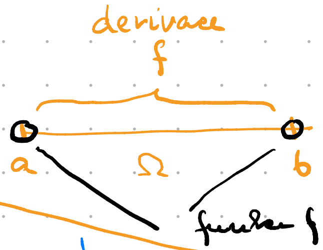
$$\alpha: I' \to I : (\theta, t) \mapsto (t, \theta)$$
$$\det J_\alpha \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\Rightarrow \phi \not\sim \phi'$$

Otázka: Jak definovat plošné integrály pro plochy dimenze k ($k > 2$) v prostoru $\mathbb{R}^d$, $d > 3$. ?

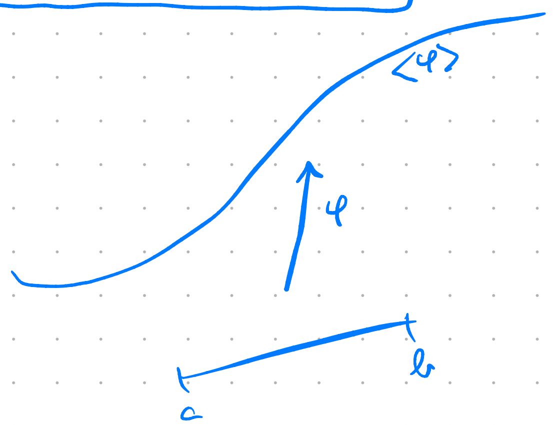
▷ Existují, a to v dimenzi 3, několik vzorců, které spojují objemové, plošné a křivkové integrály. Tyto vzorce zobecňují Newtonův vzorec

$$\boxed{\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$



Věta o potenciálu

Nechť $\vec f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ má potenciál: $\exists U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\vec f = \nabla U$



$$\int_{\langle\varphi\rangle} \vec f \cdot \vec{ds}$$

$\parallel$ def. křivk. int. 2. druhu

$$\int_a^b \vec f(\vec\varphi(t)) \cdot \vec\varphi\,'(t)\,dt$$

$$\parallel$$

$$\int_a^b \nabla U(\vec\varphi(t)) \cdot \vec\varphi\,'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^d \frac{\partial U(\vec\varphi(t))}{\partial x_i} \varphi_i'(t)\,dt$$

řetízkové pravidlo

$U(x_1, \dots, x_d)$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[U(\vec\varphi(t))\right] dt$$

$$\overset{\text{Newtonův}}{\underset{\text{vzorec}}{=}} U(\vec\varphi(b)) - U(\vec\varphi(a))$$

Tedy:

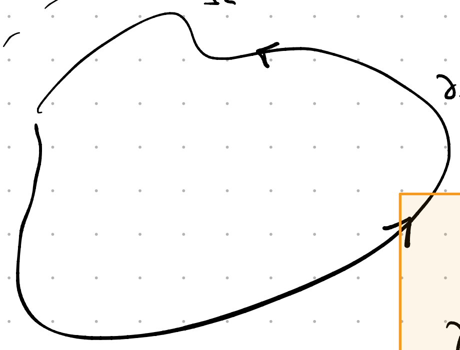
$$\int_{\langle\varphi\rangle} \vec f \cdot \vec{ds} = U(\vec\varphi(b)) - U(\vec\varphi(a))$$

$\boxed{\mathbb{R}^2}$ body, křivky, 2d oblasti — Zbývá 2D ohraničená množina souvislá

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$\vec f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (f_1(x,y), f_2(x,y))$



$\partial\Omega$ ... tvoří uzavřenou křivku

GREENOVA VĚTA

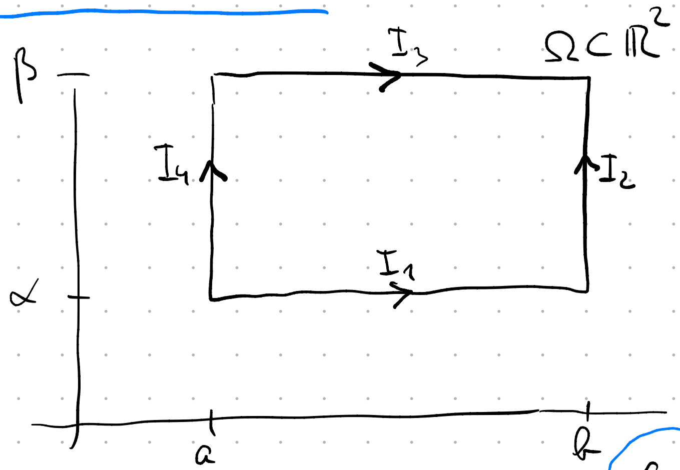
Platí:

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} \vec f \cdot \vec{ds}}_{\text{křivkový int. 2. druhu}} = \underbrace{\int_{\Omega} \Big(\underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}}_{\operatorname{curl} \vec f}\Big)\, dx\,dy}_{\text{dvourozměrný Leb. } \int}$$

skalár ve 2D

$$\boxed{\operatorname{curl} \vec f = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}}$$

Proč vzorečku věřit?



$\Omega = (a,b) \times (\alpha,\beta)$

		$\vec t = (t_1,t_2)$
I_1	$s \in (a,b) \mapsto (s,\alpha)$	$(1,0)$
I_2	$s \in (\alpha,\beta) \mapsto (b,s)$	$(0,1)$
I_3	$s \in (a,b) \mapsto (s,\beta)$	$(1,0)$
I_4	$s \in (\alpha,\beta) \mapsto (a,s)$	$(0,1)$

$$\int_{\partial\Omega} \vec f \cdot \vec{ds} = \int_{I_1 \oplus I_2 \ominus I_3 \ominus I_4} (f_1 t_1 + f_2 t_2)\, ds = \int_{I_1} \dots + \int_{I_2} \dots - \int_{I_3} \dots - \int_{I_4} \dots$$

$$= \int_a^b f_1(s,\alpha) + \int_\alpha^\beta f_2(b,s) - \int_a^b f_1(s,\beta) - \int_\alpha^\beta f_2(a,s)$$

2x Newt.

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b \frac{\partial f_2}{\partial x}(\tau, s)\, d\tau\, ds - \int_a^b \int_\alpha^\beta \frac{\partial f_1}{\partial y}(s,\xi)\, d\xi\, ds$$

Fubini

$$= \int_a^b \int_\alpha^\beta \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}(u,v) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(u,v)\Big)\, dv\, du$$

$$= \int_\Omega (\operatorname{curl} \vec f)\, dv\, du.$$

$\boxed{\Xi}$

$\boxed{\mathbb{R}^3}$ body, křivky, plochy, 3d-oblasti → Gauss

Stokes ("Green ve 3D")

věta o potenciálu

Stokesova věta

$G \subset \mathbb{R}^3$ plocha (dim 2) a její hranice

$\partial G \subset \mathbb{R}^3$ křivka (dim 1)

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \mapsto \left(F_1(\ldots), F_2(\ldots), F_3(\ldots)\right)$

$$\boxed{\underbrace{\int_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{ds}}_{\text{křivkový } \int \text{ 2. druhu}} = \underbrace{\int_G \operatorname{curl} \vec{F} \cdot \vec{dS}}_{\text{plošný } \int \text{ 2. druhu}}}$$

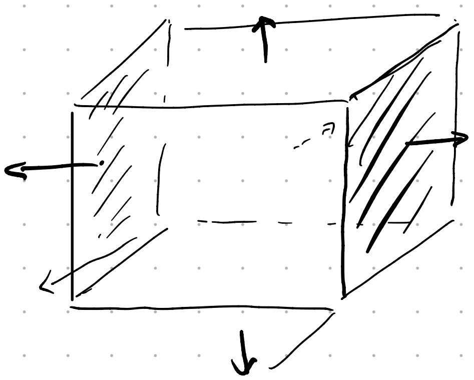
$$\operatorname{curl} \vec{F} = -\left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y},\ \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)$$

Gaussova věta

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a její hranice $\partial\Omega$, tj. plocha dim. 2 v $\mathbb{R}^3$.

Platí

$$\boxed{\underbrace{\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{dS}}_{\text{plošný } \int \text{ 2. druhu}} = \underbrace{\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz}_{\text{3-rozměrný Lebesg. } \int}}$$



a'   b

Q: Dají se tyto vzorce (1) nahlédnout jako důsledek jediné formule
(2) rozšířit do vyšších dimenzí?

Ano v jazyce dif. forem:

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} F = \int_{\Omega} dF}$$

Důsledky Gaussovy věty

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

Speciálně $\vec{F} = (0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-té místo}}}{f}, \ldots, 0) \subset \mathbb{R}^3$

$$\boxed{\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = \int f n_i\, dS}$$

Volbou $f = uv$
$\Downarrow$
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Integrace per partes pro fce více prom.

$$\boxed{\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = \int_{\partial\Omega} u v n_i\, dS - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i}}$$

Pozorování: $\underline{(-\Delta u) v} = -\operatorname{div}(\nabla u) v = -\operatorname{div}\underbrace{(v \nabla u)}_{\vec{F}} + \underline{\nabla v \cdot \nabla u}$

Pak po integraci přes Ω

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) v\, dx = -\int_{\Omega} \operatorname{div}(v\nabla u)\, dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u\, dx$$

$\downarrow$ Gauss

$$= -\int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n\, dS + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u\, dx$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u \cdot n = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_{\Omega} (-\Delta u) v = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n}\, dS}$$

$\Downarrow$

$$\int_{\Omega} (-\Delta v) u = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n}$$

A tedy

$$\boxed{\int_{\Omega} (-\Delta u) v - (-\Delta v) u = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS}$$

$d=3$

Aplikace ve variačním počtu

Uvaž: $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a definuje pro dané fce $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $g: \partial\Omega \to \mathbb{R}$

funkcionál:

$$\boxed{\Phi[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega fu - \int_{\partial\Omega} gu}$$

Dirichletův integrál

Q: Nalézt E-L. rovnici

Je-li u bodě lok. max./minima $\Rightarrow$ $\delta\Phi[u](h) = 0 \quad \forall h \in X$

Poznámka: Dříve jsme pracovali s C^1-fce na $\overline{\Omega}$. Nyní máme k dispozici i funkce, pro které $|\nabla u|^2 \in L$, $fu \in L$, $gu \in L$

$$\delta\Phi[u](h) := \lim_{t\to 0} \frac{\Phi[u+th] - \Phi[u]}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega \underbrace{|\nabla(u+th)|^2 - |\nabla u|^2} - \int_\Omega \overbrace{(f(u+th) - fu)}^{t\,f\,h} - \int_{\partial\Omega} \underbrace{g(u+th) - gu}_{t\,g\,h} \right\}$$

$(\nabla u + t\nabla h)\cdot(\nabla u + t\nabla h) = |\nabla u|^2 + 2t\,\nabla u\cdot\nabla h + t^2|\nabla h|^2$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cancel{2}} \int_\Omega \cancel{2}\,\nabla u\cdot\nabla h + \frac{t}{2}\underbrace{\int_\Omega |\nabla h|^2}_{<+\infty} - \int_\Omega fh - \int_{\partial\Omega} gh$$

$t \to 0+$: $\searrow 0$

$\Rightarrow$ $\delta\Phi[u](h) = 0 \;\; \forall h \iff$
$$\boxed{\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla h - \int_\Omega fh - \int_{\partial\Omega} gh = 0 \quad \forall h \text{ např.} \in C^1(\overline{\Omega})}$$

Integrace per-partes ✓

$$\Rightarrow \int_\Omega -\Delta u\, h + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} h\, ds - \int_\Omega fh - \int_{\partial\Omega} gh\, ds = 0 \quad \forall h \in C^1(\overline{\Omega}) \qquad (\star)$$

Volbou $h \in C^1(\overline{\Omega})$ ale $h|_{\partial\Omega}=0$

$$\int_\Omega (-\Delta u - f)\, h\, dx = 0 \qquad \forall h$$

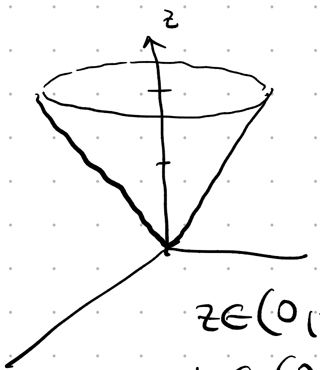
Dle zákl. lemmy variačního počtu $\boxed{-\Delta u = f \ \text{ v } \Omega}$

Dosazením této rovnice zpět do $(\Sigma\star)$ zbude

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) h\, dS = 0 \qquad \forall h \in C^1(\overline{\Omega})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial n} = g \ \text{ na } \partial\Omega}$$

Př. 1 Spočítejte obsah kuželové plochy



$z \in (0,1)$

$u \in (0, 2\pi)$

$$\vec{\varphi} : (u, z) \longmapsto (z\cos u, z \sin u, z)$$

$$\vec{t} := \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} = (-z\sin u,\ z\cos u,\ 0)$$

$$\vec{r} := \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial z} = (\cos u,\ \sin u,\ 1)$$

$|\vec{t} \times \vec{r}|$ a víme, že $|\vec{t}\times\vec{r}|^2 = \det G$,

$$G = \begin{pmatrix} t\cdot t & t \cdot r \\ t\cdot r & r\cdot r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \det G = 2z^2$$

$$S = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{2}\, z \, dz \right) du = 2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{2}\pi}}$$

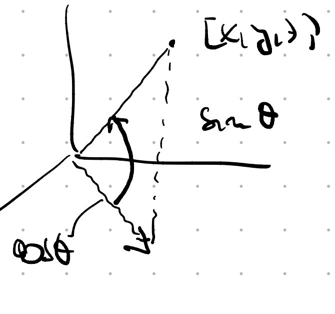
Př. 2 Spočítejte $I = \int_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$

S ... sféra v $\mathbb{R}^3$ o pol. 1.

Řeš.

$$I = \int_S \vec{F}\underset{(x,y,z)}{(x,y,z)} \cdot \vec{n}\, dS \qquad \vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (dy\,dz,\, dz\,dx,\, dx\,dy)$$

$$x = \cos\varphi \cos\theta \qquad \theta \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$y = \sin\varphi \cos\theta \qquad \varphi \in (0, 2\pi)$$
$$z = \sin\theta$$



$$\vec{t} = (-\sin\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\cos\theta,\ 0) \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\vec{r} = (-\cos\varphi\sin\theta,\ -\sin\varphi\sin\theta,\ \cos\theta) \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\vec{t}\times\vec{r} = \Big(\cos\varphi\cos^2\theta,\ \sin\varphi\cos^2\theta,\ \underbrace{\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta + \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta}_{\sin\theta\cos\theta}\Big)$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (\vec{t}\times\vec{r})\cdot\vec{F}(x,y,z)\, d = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\varphi\cos^3\theta + \sin^2\varphi\cos^3\theta + \sin^2\theta\cos\theta}_{\cos\theta}$$

$$= 4\pi$$