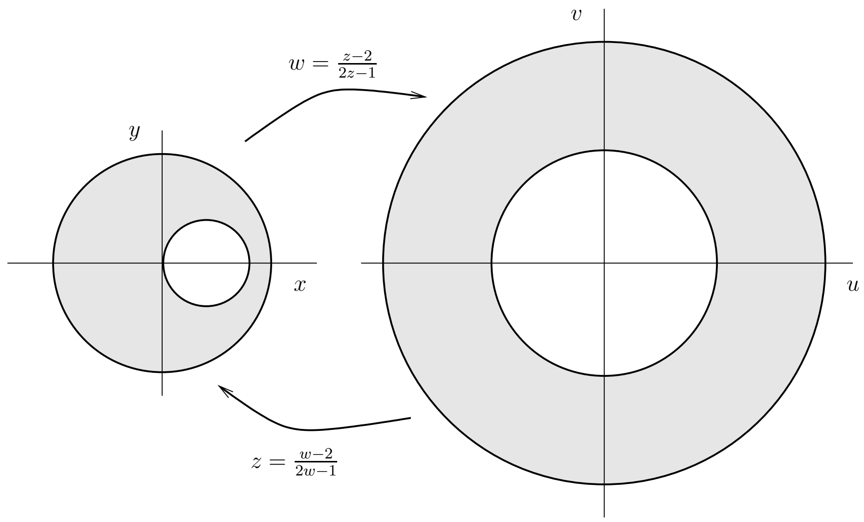
Termín pro odevzdání: čtvrtek 29. dubna 2021

Uvažujte množinu $D_{x,y}$, která je ohraničená dvě kružnicemi, viz Obrázek 1. Vnější kružnice je popsána rovnicí $|z| = 1$, vnitřní kružnice je popsána rovnici $\left|z - \frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$. Množina $D_{x,y}$ je obrazem množiny $D_{u,v}$, která je ohraničená dvěma *soustřednými* kružnicemi $|w| = 1$ a $|w| = 2$ při zobrazení

$$z = \frac{w-2}{2w-1}. \tag{1}$$

V příkladu používáme následující konvenci pro zápis komplexních čísel, $z = x + \mathrm{i}y$ a $w = u + \mathrm{i}v$.



Obrázek 1: Zobrazení mezi množinami $D_{x,y}$ a $D_{u,v}$.

1. Ukažte, že inverzní zobrazení k (1) je dáno vztahem

$$w = \frac{z-2}{2z-1}. \tag{2}$$

2. Rozmyslete si, že tvrzení uvedené v zadání je skutečně pravdivé, to jest ukažte, že množina $D_{u,v}$ se skutečně zobrazí na $D_{x,y}$. Ukažte, že kružnice $|w| = 2$ se zobrazí na kružnici $\left|z - \frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$, zatímco kružnice $|w| = 1$ se zobrazí na kružnici $|z| = 1$.

3. Na množině $D_{u,v}$ řešte Laplaceovu rovnici pro funkci $F(u, v)$,

$$\Delta_{u,v} F(u, v) = 0, \tag{3}$$
$$F(u, v)|_{u^2+v^2=1} = 0, \tag{4}$$
$$F(u, v)|_{u^2+v^2=4} = 1, \tag{5}$$

a ukažte, že řešení je dáno vztahem

$$F(u, v) = \frac{1}{2\ln 2} \ln\left(u^2 + v^2\right). \tag{6}$$

Symbol $\Delta_{u,v}$ značí Laplaceův operátor v proměnných u a v. Při řešení této úlohy by se vám mohl přijít vhod přepis Laplaceova operátoru do polárních souřadnic.

4. Na množině $D_{x,y}$ řešte Laplaceovu rovnici pro funkci $f(x, t)$,

$$\Delta_{x,y} f(x, y) = 0, \tag{7}$$
$$f(x, y)|_{\left|z-\frac{2}{5}\right|=\frac{2}{5}} = 1, \tag{8}$$
$$f(x, y)|_{|z|=1} = 0. \tag{9}$$

Měli byste dospět ke vzorci

$$f(x, y) = \frac{1}{2\ln 2} \ln \frac{(2x^2 + 2y^2 - 5x + 2)^2 + 9y^2}{\left((2x-1)^2 + 4y^2\right)^2}. \tag{10}$$

Toto je jiná technika na řešení Laplaceovy rovnice na excentrickém mezikruží než jakou jsme diskutovali na cvičení. Na cvičení jsme zvládli zobrazit *obdélník* na (skoro celé) excentrické mezikruží. Zde zobrazujeme *koncentrické mezikruží* na excentrické mezikruží. Myšlenka je ale v obou případech stejná — chceme pracovat na množině, na které lze Laplaceovu rovnici snadno řešit.

Řešení:
Inverzní zobrazení získáme jednoduchou algebraickou manipulací, stačí vyjádřit w z (1) a okamžitě dostaneme (2).

Prozkoumejme nyní chování obou zmíněných kružnic. Uvažujme nejprve kružnici $|w| = 2$. Pak jest

$$2 = |w| = \left|\frac{z-2}{2z-1}\right| = \left|\frac{x+\mathrm{i}y-2}{2(x+\mathrm{i}y)-1}\right| = \left|\frac{(x-2)+\mathrm{i}y}{(2x-1)+2\mathrm{i}y}\right| = \frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\sqrt{(2x-1)^2+4y^2}}, \tag{11}$$

odkud plyne, že mezi x a y platí vztah $4 = \frac{(x-2)^2+y^2}{(2x-1)^2+4y^2}$, což po drobných albegraických úpravách vede na rovnici

$$\left(x-\frac{2}{5}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \tag{12}$$

aneb $|z-\frac{2}{5}| = \frac{2}{5}$, což jsme chtěli ukázat. Pro kružnici $|w| = 1$ dojdeme stejným postupem k rovnici $1 = \frac{(x-2)^2+y^2}{(2x-1)^2+4y^2}$, což po drobných albegraických úpravách vede na rovnici

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{13}$$

aneb $|z| = 1$, což jsme chtěli ukázat. Zobrazení, které studujeme je lineární lomené zobrazení. Není tedy jiná možnost, že mezikruží se zobrazí na mezikruží, tedy $D_{x,y}$ se zobrazí na $D_{u,v}$.

Úlohu pro funkci F vyřešíme s použitím polárních souřadnic r, φ. Platí

$$\Delta_{u,v}F(u,v) = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2}\right)F(u,v) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}F(r,\varphi)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi^2}F(r,\varphi), \tag{14}$$

přičemž okrajovou podmínku přepíšeme jako

$$F(r,\varphi)|_{r=1} = 0, \tag{15}$$
$$F(r,\varphi)|_{r=2} = 1. \tag{16}$$

Okrajová podmínka nezávisí na úhlové proměnné, proto je rozumné hledat F pouze jako funkci r. Řešíme tedy jednu obyčejnou diferenticální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}F\right) = 0$$

s okrajovými podmínkami $F(r)|_{r=1} = 0$ a $F(r,\varphi)|_{r=2} = 1$. Výsledkem je

$$F(r) = \frac{1}{\ln 2}\ln r, \tag{17}$$

odkud po návratu do původních proměnných dostáváme

$$F(u,v) = \frac{1}{2\ln 2}\ln\left(u^2+v^2\right). \tag{18}$$

Zbývá vyřešit Laplaceovu rovnici pro f na $D_{x,y}$. Již ovšem víme ja řešit Laplaceovu rovnici pro F na $D_{u,v}$. Přechod mezi oběma množinami zajišťuje konformní zobrazení, o kterém víme, že zachovává Laplaceův operátor ve smyslu diskutovaném na cvičeních a na přednášce. Řešení úlohy pro f na $D_{x,y}$ tedy dostaneme pouhým dosazením

$$f(x,y) =_{\mathrm{def}} F(u,v)|_{u=u(x,y),\, v=v(x,y)}. \tag{19}$$

Zbývá tedy najít u a v jako funkce x a y. Vyjdeme ze vzorce $w = \frac{z-2}{2z-1}$. Rozepsáním získáme

$$u + \mathrm{i}v = \frac{(x+\mathrm{i}y)-2}{2(x+\mathrm{i}y)-1} = \frac{\left(2x^2-5x+2y^2+2\right)+\mathrm{i}3y}{(2x-1)^2+4y^2}, \tag{20}$$

odkud plyne, že

$$u = \frac{2x^2-5x+2y^2+2}{(2x-1)^2+4y^2}, \tag{21}$$
$$v = \frac{3y}{(2x-1)^2+4y^2}. \tag{22}$$

Dosazením pak získáme

$$f(x,y) =_{\mathrm{def}} F(u,v)|_{u=u(x,y),\, v=v(x,y)} = \frac{1}{2\ln 2}\ln\left(u^2+v^2\right)\Big|_{u=\frac{2x^2-5x+2y^2+2}{(2x-1)^2+4y^2},\, v=\frac{3y}{(2x-1)^2+4y^2}}, \tag{23}$$

což vede na vzorec ze zadání.