15.6. Teoretické důsledky Cauchy-Goursatovy věty

Mezi důsledky Cauchy-Goursatovy věty patří Cauchyův integrální vzorec, z kterého plyne mj. C^∞-hladkost holomorfních funkcí a také jejich analytičnost. Dalším již probraným důsledkem je Věta o residuích. Nyní probereme několik zajímavostí komplexní analýzy.

Věta 15.17 (Liouvilleova typu)

Jestliže $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ f \in H(\mathbb{C}) \\ \bullet\ \exists p \in \mathbb{N} \text{ a } \exists C > 0 \text{ tak, že } \max\limits_{|z|=R} |f(z)| \le CR^p \end{array}\right\}$, pak $\boxed{f \text{ je polynom stupně nejvýše } p}$

Speciálně: $\boxed{\text{Je-li } f \in H(\mathbb{C}) \text{ a omezená, pak je } f \text{ konstantní}}$

Dk: Protože $f \in H(\mathbb{C})$, tak $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, kde $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_R(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$.

Odsud
$$|c_n| = \left| \frac{i}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})\, Re^{it}}{R^{n+1} e^{i(n+1)t}}\, dt \right| \le \frac{1}{R^n} \max_{z \in \partial B_R(0)} |f(z)| \le C \frac{1}{R^{n-p}}$$

Tedy $\lim\limits_{R\to\infty} |c_n| \to 0$ pokud $n > p$, což dává $c_n = 0$ pro $n > p$.

Tedy: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{p} c_n z^n$ (polynom stupně nejvýše p). ∎

Věta 15.18 (základní věta algebry) Buď f polynom stupně alespoň 1. Pak $\exists z \in \mathbb{C}: f(z) = 0$.

$\boxed{\Rightarrow \forall \text{ polynom: } a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1) \dots (z - z_n)}$

Dk: Sporem. Kdyby pro všechna $z \in \mathbb{C}$ platilo, že polynom f splňuje $f(z) \neq 0$, pak $\frac{1}{f} \in H(\mathbb{C})$. Ukážeme-li, že $\frac{1}{f}$ je také omezená, pak dle Liouvilleovy věty 15.17: $\frac{1}{f} \equiv \text{konst.} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{\text{konst.}}\ \forall z \in \mathbb{C}$, což je ↯ se skutečností, že f je polynom stupně alespoň 1.

Zbývá ukázat, že $\frac{1}{f}$ je v $\mathbb{C}$ omezená.

Avšak
$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}\right)} \to 0 \text{ pro } |z| \to \infty.$$

polynom stupně n

Protože $\frac{1}{f}$ je holomorfní, tak je $\frac{1}{f}$ spojitá, a nabývá max/min na $B_R(0)$, $R \gg 1$ a tedy i na $\mathbb{C}$.

Věta 15.19 (O jednoznačnosti holomorfní funkce)

Buď $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, souvislá *). Platí:

a) je-li f je holomorfní v Ω a $N_f := \{z \in \Omega;\ f(z) = 0\}$ má v Ω hromadný bod (tzn. $\exists z_0 \in \Omega$ a $\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N_f$, $z_n \neq z_0$ tak, že $z_n \to z_0$),

pak $f \equiv 0$ v Ω.

b) je-li f holomorfní v Ω a $f \not\equiv 0$, pak N_f tvoří jen izolované body.

c) je-li f holomorfní v Ω a $A_f := \{z \in \Omega;\ f(z) = A\}$, pak $f \equiv A$ v Ω

d) jsou-li f, g holomorfní v Ω a $f = g$ v $B \subset \Omega$, přičemž B má hromadný bod v Ω, pak $f = g$ v Ω.

Použití: Spousta goniometrických vztahů, které platí v $\mathbb{R}$, platí i v $\mathbb{C}$.

Např. $\sin z, \cos z$ definovány řadou a víme, že $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Protože $\sin z, \cos z \in H(\mathbb{C})$, tak $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1 \in H(\mathbb{C})$

a platí $f(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{R}$ tedy dle V.15.19 a) $f(z) \equiv 0$ v $\mathbb{C}$.

Dk: Stačí ukázat a) neboť b)-d) jsou jednoduché důsledky a).

Ad a) ▷ Buď $\{z_n\} \subset N_f$, $z_0 \in \Omega$ a $z_n \neq z_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$: $z_n \xrightarrow{n \to \infty} z_0$ v $\mathbb{C}$

Ze spojitosti f: $f(z_n) \to f(z_0) = 0$ a tedy $z_0 \in N_f$

Z holomorfnosti f: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \underset{\substack{f(z_0)=0 \\ \Downarrow\, c_0 = 0}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

▷ Dále ukážeme, že $\exists\, U(z_0) = B(z_0)$ tak, že $f(z) = 0 \ \forall z \in B(z_0)$.

Sporem: Kdyby ne, pak $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \Rightarrow f(z) = (z - z_0)^k h(z)$, $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, $h(z_0) \neq 0$, $h \in H(B_\varepsilon(z_0))$

Ze spojitosti h a $h(z_0) \neq 0$ plyne:

$\exists B_{\tilde{\varepsilon}}(z_0)$: $h(z) \neq 0 \ \forall z \in B_{\tilde{\varepsilon}}(z_0)$. Pak ovšem

$$f(z) = (z - z_0)^k h(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_{\tilde{\varepsilon}}(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

a z_0 nemůže být hromadný bod nulové množiny N_f.

▷ viz další strana

---

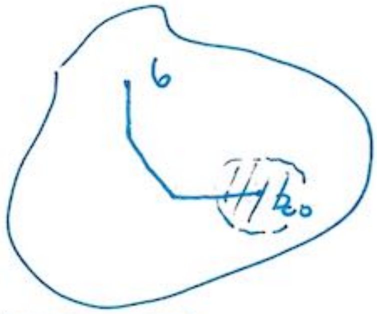
*) **Def.** • $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená je souvislá $\equiv \forall G \subset \Omega$ neprázdnou jsou G i $\Omega - G$ otevřené, pak $G = \Omega$.

v $\mathbb{C}$ jsou tyto pojmy ekvivalentní:

• $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená je křivkově souvislá $\equiv \forall z, w \in \Omega \ \exists \phi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{C}$ spojité: $\phi(\alpha) = z$ a $\phi(\beta) = w$.

• $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená je spojitelná lomenou čarou $\equiv \forall z, w \in \Omega$ $\exists$ konečná posloupnost bodů $\{u_k\}_{k=0}^{n}$ tak, že $z = u_0$, $w = u_n$ a $[u_j, u_{j+1}] \in \Omega$ úsečka

▷ Nyní již víme, že $f \equiv 0$ v okolí z_0. Ukážeme, že $f \equiv 0$ v Ω.
Buď $b \in \Omega$ libovolný. Spojme b s z_0 spojitou křivkou (viz obrázek). Pak $\exists\, c$ bod na křivce tak, že $f \equiv 0$ na části křivky z z_0 do c. Ale c je pak hromadný bod N_f a dle předchozího existuje okolí c, kde je f nulová. To dává spor s tím, že c je maximálně možný bod kde je $f = 0$ na křivce z z_0 do c. ■



Věta 15.20 (o střední hodnotě nebo o průměru)

Je-li $f \in H(\Omega)$ a $\overline{B_\varrho(z_0)} \subset \Omega$ pak $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi\varrho}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\varrho\cos t, \varrho\sin t)\,\varrho\, dt$

Dk: Cauchyův integrální vzorec:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varrho(z_0)} \frac{f(w)}{z-z_0}\,dw \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametrizace} \\ z = z_0+\varrho e^{it}}}{=} \frac{1}{2\pi\varrho}\int_0^{2\pi} f(\varrho e^{it})\,\varrho\, dt = \frac{1}{2\pi\varrho}\int_0^{2\pi} f(\varrho\cos t, \varrho\sin t)\,\varrho\, dt$$ ■

Věta 15.21 (Princip maxima) Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ $\underbrace{\text{omezená, souvislá, otevřená}}_{\text{OBLAST}}$ a $f \in H(\Omega)$ a $f \in C(\overline{\Omega})$, pak je f buď konstantní v $\overline{\Omega}$ nebo $|f(z)| < \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$ $\forall z \in \Omega$.

Dk: Předpokládejme, že $z_0 \in \Omega$ a $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ $\forall z \in \overline{\Omega}$.
Protože $f \in H(\Omega)$, tak existuje $B_R(z_0)$ tak, že $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ $\forall z \in B_R(z_0)$.

Protože

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+Re^{it})|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n,m=0}^{\infty} c_n \overline{c_m} R^{n+m} e^{i(n-m)t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 R^{2n}$$

tak

$$|c_0|^2 = |f(z_0)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2\,dt \overset{\text{předpoklad důkazu}}{\geq} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+Re^{it})|^2\,dt \overset{\text{výpočet}}{=} |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 R^{2n}$$

$\boxed{\text{Věta 15.22}}$ (Princip minima - důsledek Věty 15.21)

Nechť jsou splněny všechny předpoklady Věty 15.21 a navíc $\boxed{f \neq 0 \text{ na } \overline{\Omega}}$.

Pak je buď f konstantní nebo $|f(z)| > \min_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$

(Dk) Dle předpokladu je $\frac{1}{f}$ holomorfní v Ω a spojitá v $\overline{\Omega}$. Tedy dle V15.21 pak buď $\frac{1}{f}$ je konstantní nebo $\frac{1}{|f(z)|} < \max_{z\in\partial\Omega} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{\min_{z\in\partial\Omega}|f(z)|}$, což dává výsledek. $\forall z \in \partial\Omega$ ∎

$\boxed{\text{Věta 15.23}}$ (Řešitelnost rovnice $f(z)=0$). Buď $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ oblast.

Buď $B_r(z_0) \subset \overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Jestliže

$$|f(z_0)| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|,$$

pak $\exists z \in B_r(z_0)$: $f(z) = 0$.

(Dk) Když $f \neq 0$ v $B_r(z_0)$, pak $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in H(\underset{\text{otevřená}}{\Omega'})$ kde $B_r(z_0) \subset \overline{B_r(z_0)} \subset \Omega'$

Pak dle V 15.21: $|g(z_0)| \le \sup_{z\in\partial B_r(z_0)} |g(z)| \Rightarrow |f(z_0)| \ge \min_{z\in\partial B_r(z_0)} |f(z)|$, což dává ↯ ∎

$\boxed{\text{Věta 15.24}}$ (O otevřeném zobrazení)

Každá <u>holomorfní</u> <u>nekonstantní</u> funkce f $\in H(\Omega)$ je <u>otevřené zobrazení</u>

(tzn. zobrazuje otevřenou množinu na otevřenou)

[POZOR! v $\mathbb{R}$ neplatí: $\sin : (0, 2\pi) \xrightarrow{\text{na}} \langle -1, 1 \rangle$]

(Dk) Buď $z_0 \in \Omega$ a $\underline{w_0} = f(z_0)$.

<u>Cíl</u>: $\forall \rho > 0 \ \exists \delta > 0$ tak, že $B_\delta(w_0) \subset f(B_\rho(z_0))$

Protože f je nekonstantní, $z \mapsto f(z) - w_0$ má v z_0 izolovaný kořen (z věty o jednoznačnosti)

tak pro malé ρ: $f(z) - w_0 \neq 0 \ \forall z \in \partial B_\rho(z_0)$ $\cdot f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

Položme $2\delta := \min_{z\in\partial B_\rho(z_0)} |f(z) - w_0|$

Pak pro $\forall w \in B_\delta(w_0)$ a pro $\underline{\forall z \in \partial B_\rho(z_0)}$:

$$\left.\begin{array}{l} |f(z) - w| \ge |f(z) - w_0| - |w - w_0| \ge 2\delta - \delta = \delta \\ \text{ale } |\underset{w_0}{f(z_0)} - w| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow f(z) - w \text{ splňuje předpoklady V15.23}$$

$\Rightarrow \exists z \in B_\rho(z_0)$: $f(z) - w = 0 \Leftrightarrow f(z) = w$ a tedy $\underbrace{w \in f(B_\rho(z_0))}$,

což jsme chtěli ukázat! ∎

pouze spojitá

Věta (Morerova) Buď $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a $f \in C(\Omega)$ taková, že

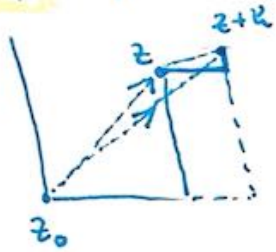
buď $\int_{\partial\Delta} f = 0 \quad \forall$ trojúhelník $\Delta \subset \Omega$

nebo $\int_{\partial\sigma} f = 0 \quad \forall$ obdélník $\sigma \subset \Omega$,

Pak $f \in H(\Omega)$

(Dk) Předpoklady umožňují zadefinovat smysluplně primitivní funkci

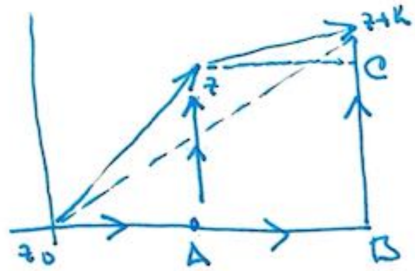
$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(z)\,dz$$ neboť body $z_0, z+h$ a z tvoří trojúhelník a k němž snadno



spočítat $\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)\,dz \xrightarrow{h\to 0} f(z)$, parametrizuji a jsem hotov.

Tedy: $F'(z) = f(z)$ a F je holomorfní, což vím znamená, že $F \in C^\infty$ a také $f \in C^\infty$ a tedy speciálně $f \in H$.

Pro obdélníky:
$$F(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{[z_0,A,z]} f(z)\,dz$$



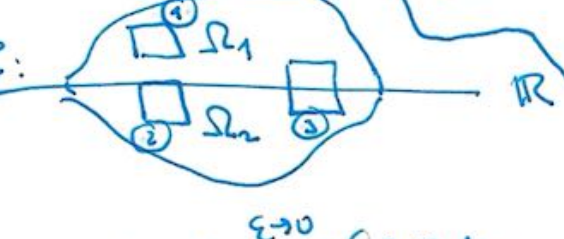
Protože $\Delta ABC = \Delta AzC$

tak
$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,C,z+h]} f(z)\,dz \xrightarrow{h\to 0} f(z)$$

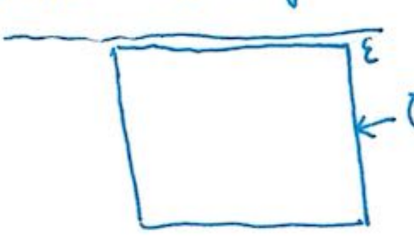
Důsledek (Spojité nalepování holomorfních funkcí)
Nechť $f \in C(\Omega)$ a p přímka protínající Ω a $\Omega \setminus p = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_i oblasti.
Je-li $f \in H(\Omega_1)$ a $f \in H(\Omega_2)$, pak $f \in H(\Omega)$.

Cíl: ukázat, že $\int_\sigma f(z)\,dz = 0$

(Dk) Stačí uvažovat situaci
3 možnosti umístění obdélníků:



1. O.K. $\int_\sigma f(z)\,dz = 0$
2. Odsunu od osy



$$0 = \int_{\sigma_\varepsilon} f\,dz \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_\sigma f(z)\,dz$$

3. Převedu na 2 obdélníky v situaci 2

Q.E.D.