Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ____________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	6	7	8	7	8	36
Získáno						

[6] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1\left([0,1]\right) \mid y(0) = 0,\ y(1) = \ln 2 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_0^1 (1+x)\left(y'\right)^2 \, \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnici pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gâteaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nezáporná.

[7] 2. Rozhodněte, zda je řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{nx^n}$$

stejnoměrně konvergentní na intervalech

a) $I = (0, 1)$,
b) $J = [1, +\infty)$,
c) $K = [\alpha, +\infty)$, $\alpha > 1$.

Dále rozhodněte, zda je tato řada na uvedených intervalech absolutně stejnoměrně konvergentní.

[8] 3. Vyšetřete průběh funkce $F(b)$ dané předpisem

$$F(b) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2 \mathrm{e}^{x^2}} \mathrm{d}x.$$

Diskutujte definiční obor funkce F, spojitost funkce F, limity v krajních bodech definičního oboru, derivaci funkce F, limity derivace v krajních bodech definičního oboru. Najděte inf, sup a (lokální) max, min (pokud existují). Načrtněte graf.

Nápověda: $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

[7] 4. Spočtěte objem tělesa $B \subset \mathbb{R}^3$, které je vymezeno plochami $z = \cos\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)$, $z = 1$ a $x^2 + \frac{y^2}{2} = \pi^2$.

[8] 5. Uvažujte funkci $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$.

a) Dodefinujte funkci f na $\mathbb{R}$ tak, abyste ji mohli rozvinout do *kosinové* Fourierovy řady. Načrtněte graf rozšířené funkce f.

b) Najděte Fourierovu řadu takto rozšířené funkce f.

c) Diskutujte konvergenci nalezené Fourierovy řady. Určete zda Fourierova řada konverguje k funkci f ve smyslu konvergence v L^2, ve smyslu bodové konvergence a ve smyslu stejnoměrné konvergence.

d) Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f.

e) Ukažte, že platí $\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{4l^2-1} = \frac{1}{2}$.

f) Ukažte, že platí $\sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{\pi} \frac{1}{4l^2-1} \right)^2 = 1 - \frac{8}{\pi^2}$.