OBSKURNÍ MATEMATICKÉ PŘÍKLADY

VÍT PRŮŠA

1. Absolutní a neabsolutní konvergence a přerovnávání řad

1.1. **Jak dokázat, že $2\ln 2 = \ln 2$.** Z teorie Taylorova rozvoje již víme, že pro $x \in (-1,1]$ platí

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}. \tag{1.1}$$

(Toto tvrzení si v jiném kontextu připomenete v jedné z následujících přednášek.) Z výše uvedeného vzorce dostaneme po dosazení $x = 1$ tvrzení

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots. \tag{1.2}$$

Pojďme nyní toto tvrzení použít ke klasické konstrukci, která nám doloží, že s řadami si není radno bezmyšlenkovitě zahrávat. Jelikož víme, že

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \cdots, \tag{1.3}$$

pak také musí platit

$$2\ln 2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \cdots. \tag{1.4}$$

Na předchozí nekonečnou řadu pohlédneme takto

$$2\ln 2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \cdots, \tag{1.5}$$

z čehož po drobném přeskupení členů plyne, že

$$2\ln 2 = 2 - 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6} + \cdots.$$

Spočteme členy v závorkách a vidíme, že platí

$$2\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots. \tag{1.6}$$

Součet nekonečné řady na pravé straně už ovšem známe, viz vzorec (1.3). Zjistili jsme tedy, že platí

$$2\ln 2 = \ln 2, \tag{1.7}$$

což je zjevně nesmysl. Kde je v celém výpočtu chyba?

1.2. **Přerovnávání řad – obecné věty.** Na přednášce či v doporučené literatuře najdete tvrzení, které říká, že každou neabsolutně konvergentní řadu lze vždy přerovnat tak, aby výsledná řada měla *jakýkoliv předem určený součet.* V literatuře je toto tvrzení známé pod názvem *Riemann rearrangement theorem*, v knize Kopáček (1998) je to Věta 10.23. Tato věta poskytuje konstruktivní návod, kterak pro danou řady najít přerovnání s požadovaným součtem. Existuje řada speciálních verzí tohoto tvrzení pro řady s alternujícími členy, z nichž mnohá oplývají velmi nápaditými důkazy. (Alternující řady jsou řady, u kterých se střídají znaménka jednotlivých členů.) Jedno takové tvrzení si dokážeme.

Věta 1 (Schlömilch (1873))**.** *Buď f klesající kladná funkce taková, že $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$, a nechť $K =_{\text{def}} \lim_{n\to+\infty} nf(n)$. Pak řada*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n) \tag{1.8}$$

konverguje. Označíme součet této řady s, tedy $s = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n)$. Přerovnáme-li tuto řadu tak, že nejprve napíšeme prvních p kladných členů z řady (1.8) a následně q záporných členů z řady (1.8) a postup opakujeme do nekonečna, pak pro součet takto přerovnané řady S platí

$$S = s + \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to+\infty} nf(n)\right] \ln\frac{p}{q}. \tag{1.9}$$

Zamyslete se nad tím, co se stane pokud $K = 0$ nebo $K = +\infty$! Dále si napište jak tvrzení zní pro $f(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x}$.

Date: 17. března 2020.

Důkaz. Z předpokladů věty je zřejmé, že řada (1.8) je konvergentní. (Jaké kritérium pro konvergenci řad s obecnými členy použijeme?) Označme si $a_n = f(n)$, a zaveďme označení

$$s_{2m} =_{\mathrm{def}} \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^n a_n. \tag{1.10}$$

pro $2m$-tý částečný součet. Předpokládejme, že $p > q$ označme si dále $S_{(p+q)n}$ částečný součet řady, která vznikne z původní řady navrženým přerovnáním,

$$\begin{aligned} S_{(p+q)n} =_{\mathrm{def}} & \underbrace{\left(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2p-2}\right)}_{p-\text{členů}} - \underbrace{\left(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2q-1}\right)}_{q-\text{členů}} \\ & + \underbrace{\left(a_{2p} + a_{2p+2} + a_{2p+4} + \cdots + a_{4p-2}\right)}_{p-\text{členů}} - \underbrace{\left(a_{2q+1} + a_{2q+3} + a_{2q+5} + \cdots + a_{4q-1}\right)}_{q-\text{členů}} \\ & \vdots \\ & + \underbrace{\left(a_{(2n-2)p} + a_{(2n-2)p+2} + a_{(2n-2)p+4} + \cdots + a_{2np-2}\right)}_{p-\text{členů}} - \underbrace{\left(a_{(2n-2)q+1} + a_{(2n-2)q+3} + a_{(2n-2)q+5} + \cdots + a_{2nq-1}\right)}_{q-\text{členů}}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Nyní si rozmyslíme, že platí

$$S_{(p+q)n} - s_{2nq} = a_{2nq} + a_{2nq+2} + a_{2nq+4} + \cdots + a_{2np-2}, \tag{1.12}$$

přičemž na pravé straně je $(p-q)n$ členů. (Vyzkoušejte si vše explicitně zapsat například pro $n = 4$, $p = 3$ a $q = 2$.)

Než pokročíme s důkazem, je čas na malou odbočku. Z vlastností Riemannova integrálu pro funkci f plyne, že platí

$$\frac{1}{h}\int_{x=a}^{a+lh} f(x)\,\mathrm{d}x \le f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(l-1)h) \le \frac{1}{h}\int_{x=a}^{a+lh} f(x)\,\mathrm{d}x + f(a) - f(a+lh). \tag{1.13}$$

(Připomeňte si, že funkce f je dle předpokladů klesající, a osvěžte si pojem horního a dolního Riemannova součtu.) Zvolíme-li konkrétní hodnoty a, h a l jako

$$a = 2nq, \tag{1.14a}$$

$$h = 2, \tag{1.14b}$$

$$l = n(p-q), \tag{1.14c}$$

vidíme, že nerovnost (1.13) lze zapsat jako

$$\frac{1}{2}\int_{x=2nq}^{2np} f(x)\,\mathrm{d}x \le f(2nq) + f(2nq+2) + f(2nq+4) + \cdots + f(2np-2) \le \frac{1}{2}\int_{x=2nq}^{2np} f(x)\,\mathrm{d}x + f(2nq) - f(2np), \tag{1.15}$$

což je

$$\frac{1}{2}\int_{x=2nq}^{2np} f(x)\,\mathrm{d}x \le a_{2nq} + a_{2nq+2} + a_{2nq+4} + \cdots + a_{2np-2} \le \frac{1}{2}\int_{x=2nq}^{2np} f(x)\,\mathrm{d}x + a_{2nq} - a_{2np}. \tag{1.16}$$

Prostřední výraz je ovšem totožný s výrazem na pravé straně rovnosti (1.12), můžeme proto psát

$$\frac{1}{2}\int_{x=2nq}^{2np} f(x)\,\mathrm{d}x \le S_{(p+q)n} - s_{2nq} \le \frac{1}{2}\int_{x=2nq}^{2np} f(x)\,\mathrm{d}x + a_{2nq} - a_{2np}. \tag{1.17}$$

V tuto chvíli je jasné kam celá kostrukce míří – nějakým způsobem chceme využít větu o limitě sevřené posloupnosti. Nejprve provedeme substituci, která nám umožní lépe nakládat s integrály. Volme $x = n\xi$ a tedy $\mathrm{d}x = n\mathrm{d}\xi$, což vede na rovnost

$$\frac{1}{2}\int_{x=2nq}^{2np} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\xi=2q}^{2p} nf(n\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{1.18}$$

Než pokročíme s důkazem, je opět čas na malou odbočku. Připomeneme si *první větu o střední hodnotě v integrálním počtu*, která praví, že pokud pro dvě funkce u a v existují integrály[1] $\int_a^b u(\xi)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ a $\int_a^b v(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, přičemž funkce v je na intervalu (a,b) nezáporná, pak existuje $c \in \left[\inf_{\xi\in[a,b]} u(\xi), \sup_{\xi\in[a,b]} u(\xi)\right]$ tak, že platí

$$\int_a^b u(\xi)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi = c\int_a^b v(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{1.19}$$

Vyzbrojeni větou o střední hodnotě se vrátíme k integrálu (1.18).

Podle první věty o střední hodnotě v integrálním počtu pro nějaké c platí

$$\frac{1}{2}\int_{\xi=2q}^{2p} nf(n\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_{\xi=2q}^{2p} \{n\xi f(n\xi)\}\frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}c\int_{\xi=2q}^{2p}\frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}c\ln\frac{p}{q}, \tag{1.20}$$

kde

$$c \in \left[\inf_{\xi\in[2q,2p]} n\xi f(n\xi), \sup_{\xi\in[2q,2p]} n\xi f(n\xi)\right]. \tag{1.21}$$

Z předpokladů věty plyne, že $\lim_{s\to+\infty} sf(s) = K$, z čehož je vidět, že $\lim_{n\to+\infty} c = K$, a tedy

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{\xi=2q}^{2p} nf(n\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}K\ln\frac{p}{q}. \tag{1.22}$$

[1] Integrálem se rozumí Riemannův integrál.

Z předpokladů na funkci f dále plyne, že

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2nq} = \lim_{n\to+\infty} f(2nq) = 0. \tag{1.23}$$

Vybaveni vztahy pro limity (1.22) a (1.23) se můžeme vrátit zpět k klíčové nerovnosti (1.17) a použít větu o limitě sevřené posloupnosti. Limitní přechod v (1.17) pak vede na

$$S - s = \frac{1}{2} K \ln \frac{p}{q}, \tag{1.24}$$

což jsme chtěli dokázat.

$\square$

Reference

Kopáček, J. (1998). *Matematická analýza pro fyziky II.* Matfyzpress.
Schlömilch (1873). Ueber bedingt-convergirende Reihen. *Z. Math. Phys.*, 520–522.

Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Sokolovská 83, Praha 8 – Karlín, CZ 186 75, Czech Republic
E-mail address: prusv@karlin.mff.cuni.cz