

**Věta 10.10** Arzela-Ascoli aueb zvláštní kompaktnost v  $C(K)$

Pro  $K \subset \mathbb{R}^d$  kompaktní. Pak platí:  $A$  closed

$$\boxed{A \subset C(K)^m = \underbrace{C(K) \times \dots \times C(K)}_{m\text{-krát}} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{je kompaktní} \end{array}}$$

$$\bullet \exists K > 0 \sup_{f \in A} \sup_{x \in K} |f(x)| \leq L$$

stejně omezená  
[omezenost A]

$$\bullet \sup_{f \in A} |f(x+h) - f(x)| \xrightarrow[h \rightarrow 0]{\substack{\text{pro } |h| \rightarrow 0 \\ \text{na } K}} 0$$

**Formulace pro posloupnosti** Necht  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([a,b])$  splňuje

(P1)  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  jsou stejně omezené  $\exists K > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [a,b] |f_n(x)| \leq K$

(P2)  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  jsou stejně stejnoměrně spojitě tak.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall x', x'' \in [a,b] |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Pak  $\exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}$ , která konverguje v  $C([a,b])$ .

(D) Uvaž racionalní čísla v  $(a,b)$ . Víme, u každé posloupnosti  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  existuje podposloupnost. Seřadíme je do posloupnosti  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Nyní konstruuje:

$$\begin{array}{l} \bullet \{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty} \text{ je omezená, existuje } \{f_{1,n}(x_1)\}_{n=1}^{\infty} \text{ která konverguje} \\ \bullet \{f_{1,n}(x_2)\}_{n=1}^{\infty} \text{ --- } \bullet \{f_{2,n}(x_2)\}_{n=1}^{\infty} \text{ ---} \\ \vdots \end{array}$$

Uvažme posloupnost  $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$  (Cantorova diagonalizace)

Pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,n}(x_k)$  existuje pro  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

Zbyvá ukázat, že  $f_{n,n}$  je Cauchyovská v supremu normě, tudíž splňuje B-C podmínku stejnoměrné konvergence.

Zvolme  $\varepsilon > 0$ . K němu najdeme  $\delta > 0$  z podmínky (P2)

Pak najdeme  $l$  racionalních čísel  $y_i, i=1, \dots, l$ , tak, že

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^l (y_i - \delta, y_i + \delta).$$

Nyní pro každé  $t \in [a, b]$  existují  $y_j : |t - y_j| < \delta$ .

Maže

$$|f_{m,m}(t) - f_{m,m}(t)| \leq |f_{m,m}(t) - f_{m,m}(y_j)| + |f_{m,m}(y_j) - f_{m,m}(y_j)|$$

$$+ |f_{m,m}(y_j) - f_{m,m}(t)|$$

$\leq 2\varepsilon$  ne stejné stejnoměrně spojitosti vit (P2).

ke udítat mst  
ne  $\varepsilon$   
 $\forall m, n \geq N = \max\{N_1, \dots, N_\ell\}$   
(jiné udítat  $y_j$ )

Kapitola 10.11. Diniho věta (postupující podmínka stejnoměrné konvergence).

Věta 10.11. (Dini)

- $f_n, f \in C([a, b])$
  - $f_n \rightarrow f$  v  $[a, b]$
  - $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n \geq \dots \geq f$  v  $[a, b]$
- $\Rightarrow f_n \rightarrow f$  v  $[a, b]$ .

ESNÍ  
MONOTONIE

(D4) Uvažování  $\psi_n: f_n - f$  a následně přetržení  $f = \psi_n$ ,  
ne uvažovat, že už na obecnosti, situaci  $f_n \geq 0$  a  $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$  v  
prostoru, když  $f_n \not\equiv 0$  na  $[a, b]$  tak nerovinně indexů  $(n)$  tak, že  
 $\sup_{x \in [a, b]} f_n(x) \geq \varepsilon_0$  existuje  $\varepsilon_0 > 0$  a  
Opět uvažujeme jen tato  $n$  a  $f_n$ .

Proto  $f_n \in C([a, b])$ ,  $\exists x_n \in [a, b]$   $f_n(x_n) \geq \varepsilon_0$ .

Ale  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  je omezená  $\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}$  a  $x_0 \in [a, b] : x_{n_k} \rightarrow x_0$

Opět přetržení a uvažujeme  $f_n(x_n) \geq \varepsilon_0$  a  $x_n \rightarrow x_0$ .

Paž  
 $m < l$

$$0 < \varepsilon_0 \leq f_l(x_l) \leq f_m(x_l) = f_m(x_l) - f_m(x_0) + f_m(x_0)$$

$$\leq |f_m(x_l) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0)|$$

m zapísní tu, aby:

$< \frac{\varepsilon_0}{3}$  Ale spojitosti  
již zapísní  
 $f_m$  a  $x_l \rightarrow x_0$   
 $< \frac{\varepsilon_0}{3}$  z bodové  
konvergence

Tedy  $\varepsilon_0 \leq \frac{2\varepsilon_0}{3} \Leftrightarrow 3 \leq 2$

z bodové  
konvergence