3. TEORIE DISTRIBUCÍ

Na konci 20. let minulého století Paul Dirac zavedl, při bádání v oblasti kvantové mechaniky, tzv. δ-funkci, která má tyto vlastnosti:

(D1) • $\delta(x) = 0$ pro $x \neq 0$

(D2) • $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ pro libovolnou spojitou fci φ.

Víme z teorie Lebesgueova integrálu, že δ nemůže být (lokálně) integrovatelná funkce, neboť z druhé podmínky pro $\varphi \equiv 1$ plyne

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx,$$

přičemž z první podmínky plyne

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx = 0.$$

Trvalo několik let než se matematikům podařilo najít přístup, který dá δ-funkci, vnímané jako lineární spojitý funkcionál definovaný na prostoru hladkých funkcí, přesný matematický význam.

Matematická teorie, která na tyto otázky odpovídá, se nazývá teorie distribucí.

(či symbolické)

3.1. Funkce a zobecněné funkce neboli (distribuce)

Distribuce zobecňují pojem funkce tak, abychom mohli dobře matematicky popsat pojmy jako hustota materiálového bodu, hustota bodového náboje či dipólu, intensita bodového zdroje, velikost okamžité síly působící v bodě.

Distribuce také zachycují skutečnost, že ve skutečnosti je velice obtížné měřit např. teplotu v bodě a spíše měříme průměrné hodnoty v okolí a za hodnotu v bodě pak prohlásíme limitu průměrů.

Teorie distribucí byla vyvinuta Laurentem Schwartzem (Francie) a S. L. Sobolevem (SSSR). Pokusme se motivovat tuto teorii snahou porozumět významu distribuce náboje. Inženýři a fyzici vždy využívali různé typy distribuce náboje: bodový zdroj (náboj), křivkový náboj, plošný náboj, objemový náboj, bodový dipól, plošná vrstva dipólů, atd. Pokusme se dát těmto termínům přesnější matematický význam.

Jak můžeme rozpoznat jaký druh (typ) distribuce náboje máme? Jediná možnost je provést experiment, který změří náboj. Přitom používáme zařízení, které nám zobrazí jakýsi průměr náboje v oblasti. Velikost oblasti závisí na kvalitě instrumentu (měřícího zařízení). Pokud chceme měřit bodový náboj, musíme mít zařízení, které je schopné měřit náboj ve stále menší a menší oblasti obsahující bod našeho zájmu. I když zanedbáme kvantové jevy, ani teoreticky ani prakticky nemáme nástroj, který by měřil náboj přesně v bodě.

Tuto situaci lze popsat matematicky takto:
buď φ měřící zařízení a $Q(\varphi)$ hodnota náboje daná ukazatelem zařízení φ.

Například, pokud existuje objemová hustota náboje $\rho = \rho(x)$,

$(\rho \in L^1)$ pak $Q(\varphi) := \int \rho(x)\varphi(x)\,dx$

Zřejmě $Q(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 Q(\varphi_1) + \alpha_2 Q(\varphi_2)$

pro $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$
$\forall\, \varphi_1, \varphi_2$

neboli Q je <u>lineární funkcionál</u> na množině <u>měřících zařízení</u>

Prvky φ (odpovídá měřicí zařízení) budeme nazývat <u>testovací funkce</u>. Lze uvažovat spoustu variant pro prostory testovacích funkcí; níže zavedeme $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

<u>Lineární</u> <u>spojité</u> funkcionály na $\mathcal{D}(\Omega)$, viz funkcionál náboj Q výše, pak budeme nazývat <u>distribuce</u> či <u>zobecněné</u> nebo <u>symbolické</u> <u>funkce</u>.

Důvody proč budeme pracovat s $\mathcal{D}$ či $\mathcal{S}$ je několik.

<u>Matematika</u>:
- funkcionály na těchto prostorech budou mít dobré konvergenční vlastnosti
- třída distribucí bude "veliká"

<u>Fyzika</u>: měřicí zařízení (testovací funkce) je efektivní v místě měření a daleko od něj jsou hodnoty potlačeny.

$\boxed{\text{Definice}}\ \boxed{\mathcal{D}(\Omega)}$ Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Řekneme, že $\varphi_k \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, píšeme $\boxed{\varphi_k \to \varphi \text{ v } \mathcal{D}}$, pokud $\exists K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní tak, že:

- $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ pro každé $k \in \mathbb{N}$
- $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$ v K a také $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ v K pro každý multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

Připomeň:
- $\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in \Omega ; \varphi(x) \neq 0\}}$ (uzávěr množiny bodů, kde je φ nenulová.)
- $D^\alpha \varphi(x) := \dfrac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$ $\quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$

$\boxed{\text{Definice}}$ (DISTRIBUCE) DISTRIBUCE nebo ZOBECNĚNÁ FUNKCE nebo SYMBOLICKÁ FUNKCE je <u>funkcionál T na $\mathcal{D}(\Omega)$</u>, <u>který je *lineární a spojitý*</u>, tzn.: $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) splňuje

1) $T(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2)$ pro každé $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$), $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$
<u>LINEARITA</u>

2) $T(\varphi_k) \to 0$ pokud $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}$
<u>SPOJITOST</u>

<u>Pozorování!</u> Všimněme si, že z vlastností 1) a 2) plyne tvrzení:

$\boxed{\text{Pokud } \varphi_k \to \varphi \text{ v } \mathcal{D}(\Omega) \text{, pak } T(\varphi_k) \to T(\varphi).}$

Dk: Označme $\psi_k := \varphi_k - \varphi$. Pak $\psi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ dle předpokladu.
Z vlastnosti 2) plyne $T(\psi_k) \to 0$, což znamená $T(\varphi_k - \varphi) \to 0$.
Z vlastnosti 1) pak máme $T(\varphi_k) - T(\varphi) \to 0$ neboli $T(\varphi_k) \to T(\varphi)$.

POUČENÍ: U <u>lineárních</u> funkcionálů <u>stačí zkoumat spojitost v 0.</u>

<u>Označení</u>

- $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\Omega)$ je množina všech spojitých lineárních funkcionálů na $\mathcal{D}(\Omega)$.
  je množina všech distribucí
- Temperované distribuce = spojité lineární funkcionály na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ je množina všech <u>temperovaných distribucí</u>

PŘÍKLADY ① <u>Integrovatelné funkce jsou distribuce.</u> Buď $f \in L^1_{loc}(\Omega)$
tzn. $f \in L^1(K)$ pro každý kompakt $K \subset \Omega$.

Definujme $\boxed{T(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{pro libovolné } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$

Ukážeme, že T je distribuce.

a) <u>$T(\varphi) < \infty$ pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$</u> neboť $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \overset{\varphi \text{ má nosič v nějakém } K}{=} \int_K f(x)\varphi(x)\,dx$

$\leq \max_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \int_K |f(x)| < \infty$

b) <u>T je lineární.</u> $T(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \int_\Omega f(x)\left[\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)\right]dx$

linearita integrálu $= \alpha_1 \int_\Omega f(x)\varphi_1(x)\,dx + \alpha_2 \int_\Omega f(x)\varphi_2(x)\,dx$

$= \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2)$

c) <u>T je spojité.</u> Buď $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ libovolná. Pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní tak, že $\varphi_k \rightrightarrows 0$ v K
tzn. $\sup_{x\in\Omega} |\varphi_k(x)| \to 0$ pro $k \to \infty$.

Pak $|T(\varphi_k)| = \left|\int_\Omega f(x)\varphi_k(x)\,dx\right| = \left|\int_K f(x)\varphi_k(x)\,dx\right| \leq$

$$\int_K |f(x)|\,|\varphi_k(x)|\,dx \le \underbrace{\underbrace{\sup_{x\in K}|\varphi_k(x)|}_{\downarrow \atop 0}\;\underbrace{\int_K |f(x)|\,dx}_{<+\infty}} \longrightarrow 0.$$

∎

$\boxed{\text{Definice}}$ Distribuci T, kterou lze popsat ve tvaru $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$, tzn.

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

přičemž $f\in L^1_{loc}(\Omega)$, nazýváme <u>regulární distribuce</u>.

Př. (2) <u>Diracova distribuce</u>. Buď $a\in\Omega$. Označme δ_a funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ definovaný $\delta_a(\varphi) := \varphi(a)$.
Speciálně $\delta(\varphi) := \delta_0(\varphi)$.

Ukážeme, že δ_a je distribuce.

a) $\delta_a(\varphi) = \varphi(a) < \infty$ pro libovolné $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$

b) linearita. $\delta_a(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2) = \left(\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)\right)\Big|_{x=a}$
$= \alpha_1\varphi_1(a)+\alpha_2\varphi_2(a) = \alpha_1\delta_a(\varphi_1)+\alpha_2\delta_a(\varphi_2)$.

c) spojitost. Buď $\{\varphi_k\}\subset\mathcal{D}(\Omega)$ libovolná splňující $\varphi_k\to 0$ v $\mathcal{D}$, pak speciálně
$\varphi_k(a)\to 0 \quad (k\to\infty)$

Tedy $\delta_a(\varphi_k) = \varphi_k(a) \to 0$.

Př. (3) <u>Funkce, jež mají integrál ve smyslu hlavní hodnoty, jsou distribuce.</u>

Lze definovat $\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\,dx$ předpisem $\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R}\frac{1}{x}\,dx\right]$

Vidíme, že zatímco $\frac{1}{x}\notin L^1(\mathbb{R})$, tak $\frac{1}{x}$ má integrál ve smyslu hlavní hodnoty a platí

$$(*)\qquad \text{v.p.}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_{-R}^{-\varepsilon} + \left[\ln x\right]_{\varepsilon}^{R} = 0$$

$\boxed{\text{v.p.}}$ je zkratka francouzského „valeur principale"; někdy se používá také PV pro anglické „principal value", či $\boxed{\text{p.v.}}$ místo v.p.

Definujme funkcionál $T_{v.p.\frac{1}{x}}$ předpisem

$$T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi) := v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx. \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ukážeme, že $T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi)$ je distribuce.

1) $\boxed{|T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi)| < \infty \quad \text{pro } \forall \varphi}$

Pro libovolné, pevné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\exists (K>0)$ supp $\varphi \subset \langle -K, K\rangle$.

Dk

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} + \int_{\varepsilon}^{K} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} + \int_{\varepsilon}^{K} \frac{\varphi(0)}{x}\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\right]$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{K} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\right]$$

$$=: I_1 + I_2 + I_3.$$

První člen I_1 je roven 0, dle (*), viz str 3/5 dole.
Dle Taylorova rozvoje s Lagrangeovým tvarem zbytku:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \varphi'(\xi_x) \qquad \text{kde } \xi_x \in (x,0)$$

Tedy $|I_2| \leq \max_{\xi \in [-K,0]} |\varphi'(\xi)|\, K < \infty$

Člen $I_3 < \infty$ s použitím stejného argumentu

2) $\boxed{\text{Linearita}}$ $T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi)$ plyne z linearity $\int_{\mathbb{R}} \dots dx$.

3) $\boxed{\text{Spojitost}}$ Nechť $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}$. Speciálně

$$\varphi_k \rightrightarrows 0 \text{ a } \varphi_k' \rightrightarrows 0 \text{ na jistém } [-K,K] \quad K \in (0,\infty)$$

Pak, podobně jako v 1), máme

$$T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi_k) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{\varphi_k(0)}{x} + \int_{\varepsilon}^{K} \frac{\varphi_k(0)}{x}\right] + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-K}^{\varepsilon} \varphi_k'(\xi_x)\,dx$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{K} \varphi_k'(\xi_x)\,dx.$$

Opět, první člen je nulový a zbylé dva odhadneme členem

$2K \max_{s\in[-K,K]} |\varphi_k'(s)|$, který konverguje k 0, neboť

$$\varphi_k' \rightrightarrows 0 \text{ v } [-K,K].$$

QED

Zavedli jsme pojem distribuce a ukázali, že Diracova δ-funkce je vlastně spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ či $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Můžeme však lépe motivovat vlastnost (D2) δ-funkce? Pokusíme se o to?

Z úvodu do variačního počtu víme, že nutná podmínka existence minimizéru nějakého obecně nelineárního funkcionálu Φ je charakterizována podmínkou $g'(0)=0$, kde $g(t):=\Phi(u+t\varphi)$.

Víme také, že v případě, kdy

$$(\text{VarP}) \qquad \Phi(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla u(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(x)u(x)\,dx,$$

podmínka

$$g'(0)=0$$

implikuje

$$(E\text{-}L)^{\bullet}_{PDR} \qquad \boxed{\int_\Omega a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx - \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{které platí pro } \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).}$$

[Proveďte!]

Zde $a:\Omega\to\mathbb{R}^+$ je vhodná daná funkce, může být hladká, ale také jen omezená a měřitelná.

Ukázali jsme si, že za předpokladu, že f, a, u jsou hladké, $(E\text{-}R)_{PDR}$ implikuje

$$(E\text{-}L)_{PDR} \qquad \boxed{-\operatorname{div}\big(a(x)\nabla u\big) = f \quad \text{v } \Omega}$$

Soustřeďme se nyní jen na druhý člen v $(E\text{-}L)^{\bullet}_{PDR}$, tj.

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \text{kde } \varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Zkusme spočítat

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{pro } f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|} & x\in B_{\frac{1}{k}}(0) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

míra 1-koule v $\mathbb{R}^d$

Pak $\int_\Omega f_k(x)\,dx = 1 \quad \forall k\in\mathbb{N}$. (Předpokládáme, že $B_1(0)\subset\Omega$).

pro libovolné pevné $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

Navíc,
$$\int_\Omega f_k(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \varphi(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \varphi(0)\,dx + \underbrace{\frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \varphi(x)-\varphi(0)\,dx}_{=: I}$$

$$= \varphi(0) + I$$

a
$$|I| \leq \frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} |\nabla\varphi(\xi_x)\cdot(x-0)| \leq \max_{s\in \overline{B_1(0)}} |\nabla\varphi(s)| \int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \frac{|x|}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\,dx$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{k}}_{\downarrow 0}\ \underbrace{\max_{x\in\overline{B_1(0)}} |\nabla\varphi(x)|}_{<\infty} \longrightarrow 0 \text{ pro } k\to\infty.$$

Tedy
$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Nyní jsme nejen motivovali podmínku (D2) ze strany 3/1, ale také jsme ukázali, že f_k vnímané jako regulární distribuce T_{f_k} (tzn. $T_{f_k}(\varphi) = \int_\Omega f_k(x)\varphi(x)$)

splňují
$$\boxed{\lim_{k\to\infty} T_{f_k}(\varphi) = \delta(\varphi) \quad \text{pro } \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)}$$
, kde δ je δ-distribuce definovaná v příkladu 2.

Tento limitní vztah motivuje následující definici.

Definice Buď $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ otevřená, $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$.
Říkáme, že T_k konvergují k T slabě (nebo v $\mathcal{D}'$) pokud
$$\langle T_k,\varphi\rangle \to \langle T,\varphi\rangle \quad \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$
Říkáme, že $\boxed{\sum_{k=1}^\infty T_k = T \text{ v } \mathcal{D}'} \iff \sum_{k=1}^\infty \langle T_k,\varphi\rangle = \langle T,\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$

3.2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI DISTRIBUCÍ (DISTRIBUTIVNÍ POČET)

V této sekci se budeme snažit pochopit operace s distribucemi: posunutí, škálování, derivování, integrování, ...

Distribuce můžeme rozdělit na regulární a ostatní (singulární). Regulární distribuce jsou takové, které jsou určeny lokálně integrovatelnými fce:

$$T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\updownarrow$$

$$f \in L^1_{loc}$$

kde ztotožňuji funkce, které se liší na množině míry nula, neboť jen pak je každá regulární distribuce určena jednoznačně fcí z L^1_{loc} [přesněji třídou ekvivalence]. Viz více str. 3/14

Tedy
$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$
Také víme
$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^1(\Omega) \text{ je hustý v } L^1$$
Máme tedy
$$\boxed{\mathcal{D}(\Omega) \subset L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'(\Omega)}$$

Platí následující věta, kterou lze z předchozích snadno ověřovat.

Tvrzení
Buď $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pak $\exists \{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tak, že $f_n \to T$ v $\mathcal{D}'$.

Toto tvrzení nám umožňuje vybudovat distributivní počet tak, že nejdříve vyzkoumáme možné vztahy pro regulární distribuce generované funkcemi z $\mathcal{D}(\Omega)$ a pak provedeme rozšíření těchto vztahů pro libovolné distribuce přes hustotu.

Na ZNAČENÍ ZÁLEŽÍ. Budeme psát
$\boxed{\langle T, \varphi \rangle}$ místo $\boxed{T(\varphi)}$, kde $T \in \mathcal{D}'$ a $\varphi \in \mathcal{D}$

a také
$\boxed{\langle f, \varphi \rangle}$ místo $\boxed{\langle T_f, \varphi \rangle = T_f(\varphi)}$ je $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ a T_f je korespondující regulární distribuce.

Distributivní počet pro regulární distribuce

- **POSUNUTÍ** Připomeň, že pro $a \in \mathbb{R}^d$: $\tau_a f(x) := f(x+a)$

$$\underline{\langle \tau_a f, \varphi \rangle} = \int_\Omega f(x+a)\varphi(x)\,dx \underset{z=x+a}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(z-a)\,dz = \underline{\langle f, \tau_{-a}\varphi\rangle}$$

Posunutí distribuce o a — Posunutí test. fce o $-a$

$f \equiv 0$ mimo Ω
$\varphi \equiv 0$ mimo Ω

- **ŠKÁLOVÁNÍ** (změna měřítka)
zavedíme pro $\lambda > 0$: $d_\lambda f(x) := f(\lambda x)$

$$\underline{\langle d_\lambda f, \varphi\rangle} = \int_\Omega f(\lambda x)\varphi(x)\,dx \underset{\substack{z=\lambda x\\ dx = \frac{dz}{\lambda^d}}}{=} \frac{1}{\lambda^d}\int_\Omega f(z)\varphi\left(\frac{z}{\lambda}\right)dz = \underline{\frac{1}{\lambda^d}\langle f, d_{\frac{1}{\lambda}}\varphi\rangle}$$

- **DERIVOVÁNÍ** Nechť $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ je multi index, a $D^\alpha f$ a všechny derivace nižšího řádu jsou z $L^1_{loc}(\Omega)$.

$$\underline{\langle D^\alpha f, \varphi\rangle} = \int_\Omega D^\alpha f(x)\varphi(x)$$
$$= \int_\Omega \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\varphi(x)\,dx$$
$$\underset{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}{\overset{\text{per partes}}{=}} (-1)^{|\alpha|}\int f(x) D^\alpha\varphi(x)\,dx = \underline{(-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha\varphi\rangle}$$

- **NÁSOBENÍ** (skalární) funkcí $m \in C^\infty(\Omega)$

$$\underline{\langle mf, \varphi\rangle} = \int_\Omega m(x) f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\, m(x)\varphi(x)$$
$$= \langle f, m\varphi\rangle$$

DŮLEŽITÉ: $m\varphi \in \mathcal{D}$!! pro $\varphi \in \mathcal{D}$

Pokud m není diferencovatelné, nelze násobit hezčí. Uvažme například $m(x) = \operatorname{sgn} x$, pak $m\delta$ nelze smysluplně definovat neb $\langle m\delta, \varphi\rangle = m(0)\varphi(0)$ a není konzistentní způsob jak definovat $m(0)$.

Všechny výše uvedené vztahy mají tvar:

pro $\mathcal{O}f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\boxed{\langle \mathcal{O}f, \varphi\rangle = \langle f, S\varphi\rangle \quad \text{pro } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),}$

kde $\mathcal{O}$ je operátor, který chceme rozšířit — operátor posunutí, škálování, derivování, násobení C^∞ fcí.

a S je operátor, který dává platnost vztahu v $\boxed{}$.

Je-li $T \in \mathcal{D}'$ takové, že $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ splňují $f_n \to T$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$

tzn. $\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

pak $\langle f_n, S\varphi \rangle \to \langle T, S\varphi \rangle$ $\forall \varphi$

neboli:

(☆) $$\lim_{n\to\infty} \langle O f_n, \varphi \rangle = \langle T, S\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

a levou stranu (☆) označme $\langle OT, \varphi \rangle$. Tedy

$$\langle OT, \varphi \rangle = \langle T, S\varphi \rangle \quad \text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Máme tedy, pro lib. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

(1) $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle$ $\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}$

(2) $\langle d_\lambda T, \varphi \rangle = \frac{1}{\lambda^d} \langle f, d_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \rangle$ $\quad$ —||— , $\lambda > 0$

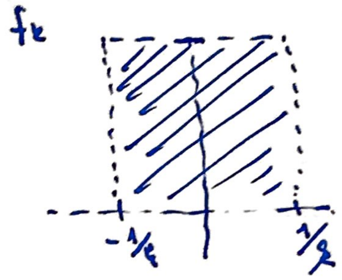
(3) $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = \langle f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle$ $\quad$ —||— , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

(4) $\langle mT, \varphi \rangle = \langle T, m\varphi \rangle$ $\quad$ —||— , $m \in C^\infty$

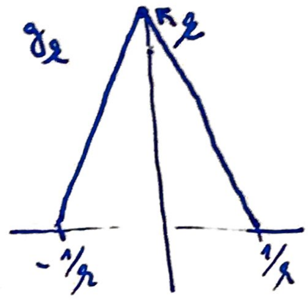
Příklady ① Ze vztahu (3) plyne, že $(E-L)_{PDR}$ je pro $f \in L^1_{loc}$ a pro $a\nabla u \in L^1_{loc}$ (což plyne mj. z předpokladů $a \in L^\infty(\Omega)$ a $\nabla u \in L^1_{loc}$) popis PDR $(E-L)_{PDR}$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$, přičemž oba členy představují regulární distribuce. Je-li však $f = \delta$ pak pro $a \in C^\infty(\Omega)$ $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distributivní řešení $(E-L)_{PDR}$ pokud

$$\langle u, -\mathrm{div}(a(x) \nabla \varphi) \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

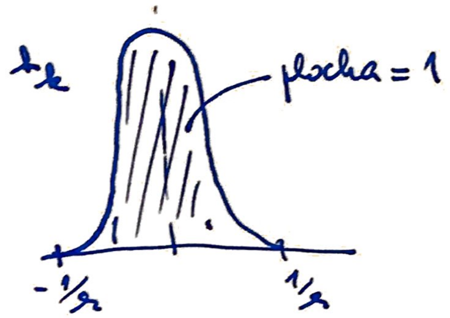
② Víme, že $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ definované obrázkem 1 konvergují k δ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ověřte, že také $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ definované obrázkem 2 konvergují k δ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Rovněž $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ z obrázku 3.



Obr. 1



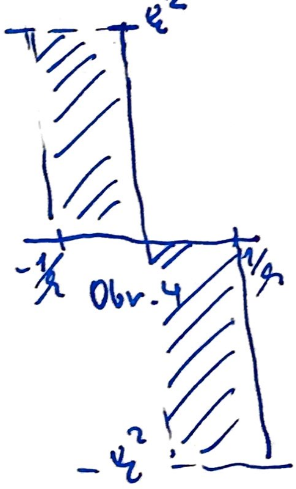
Obr. 2



Speciálně
$\langle g_k,\varphi\rangle = \int_{\Omega} g_k(x)\varphi(x) \longrightarrow \langle\delta,\varphi\rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$

Počítejme přímo $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega=\mathbb{R}} g_k'(x)\varphi(x)$. Funkce g_k' je načrtnuta v Obr. 4. Tedy

$$\int_{\mathbb{R}} g_k'(x)\varphi(x) = k^2\int_{-1/k}^{0}\varphi(x)\,dx - k^2\int_{0}^{1/k}\varphi(x)\,dx \approx \frac{\varphi\left(-\frac{1}{2k}\right)-\varphi\left(\frac{1}{2k}\right)}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} -\varphi'(0)$$



Obr. 4

Tedy platí: $\langle\delta',\varphi\rangle = -\langle\delta,\varphi'\rangle$
ve shodě s vlastností (3), a také:
pokud $g_k\to\delta$ v $\mathcal{D}'$, pak $g_k'\to\delta'$ v $\mathcal{D}'$. ☒

③ Spočtěme $m\delta'$ pro $m\in C^{\infty}$. Uvidíme, že náš naivní předpoklad: $\langle m\delta',\varphi\rangle = -m(0)\varphi'(0)$ nebude správný.

Platí:

$$\langle m\delta',\varphi\rangle \overset{(4)}{=} \langle\delta', m\varphi\rangle \overset{\text{Př ②}}{=} -(m\varphi)'(0)$$
$$= -m'(0)\varphi(0) - m(0)\varphi'(0) = \langle -m'(0)\delta + m(0)\delta',\varphi\rangle$$

Tedy $\boxed{m\delta' = +m(0)\delta' - m'(0)\delta}$

④ Ukážeme, že pro libovolné $a>0$, je f_a definované předpisem

$$\langle f_a,\varphi\rangle := \int_{-\infty}^{-a} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx + \int_{a}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx + \int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,dx$$

je distribuce.

<u>Řešení</u>: ① $\boxed{\langle f_a,\varphi\rangle<\infty \ \text{ pro } \forall\varphi}$ $\quad$ $\operatorname{supp}\varphi \subset \langle -K,K\rangle$ pro nějaké $K>0$

Intervaly $\langle -K,-a\rangle$ a $\langle a,K\rangle$ jsou kompaktní a funkce $\frac{\varphi(x)}{|x|}$ je tam omezená, tedy

$$\int_{-\infty}^{-a}\frac{\varphi(x)}{|x|} + \int_{a}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{|x|} < \infty$$

Člen

$$\left|\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,dx\right| = \left|\int_{-a}^{a}\frac{\varphi'(\xi_x)\,x}{|x|}\right| \le \underbrace{\max_{s\in[-a,a]}|\varphi'(s)|}_{<+\infty}\, 2a < \infty$$

② <u>linearita</u> ano, ověřte.

③ <u>spojitost</u> $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \varphi_k' \rightrightarrows 0$, $\varphi_k \rightrightarrows 0$ na jistém $\langle -L,L\rangle$, $L>0$.

Pak argumenty užitých v bodě ① výše, lze vyvodit, že
$$\langle f_a,\varphi_k\rangle \to 0 \quad \text{pro } k\to\infty.$$

$\boxed{\text{PONAUČENÍ}}$ Funkce $\frac{1}{|x|}$ není prvkem $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, ani není integrovatelná ve smyslu hlavní hodnoty. K této funkci existují ∞-distribucí (parametrizovaných parametrem $a>0$).

Ačkoliv $\frac{1}{|x|}\geq 0$, tak neplatí $\langle f_a,\varphi\rangle \geq 0$ pro $\forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi\geq 0$. Tedy f_a není nezáporná distribuce; zatímco např. δ_0 je nezáporná distribuce.

<u>Definice</u> Říkáme, že $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ je <u>nezáporná</u> $\equiv \langle T,\varphi\rangle \geq 0 \ \forall \varphi\geq 0$, $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$.

Kontrolní otázky

1) Je $\langle f,\varphi\rangle := \varphi^{3}(0)$ distribuce? NE

2) Je $\langle f,\varphi\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ distribuce? ANO

$\boxed{\text{KONSISTENCE DERIVACÍ}}$

Nechť $f, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ jsou spojité v Ω. Ztotožníme f s $T_f \in \mathcal{D}'$ a uvažujme $\frac{\partial T_f}{\partial x_k}$. Platí pak, že $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ a $\frac{\partial T_f}{\partial x_k}$ se rovnají v distributivním smyslu? Odpověď je kladná. Důkaz:

pro $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}\varphi\, dx = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx$$

integrací per-partes vzhledem k proměnné x_k.

pro T_f platí

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_k}, \varphi\right\rangle = -\left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right\rangle.$$

Protože f je regulární distribuce, tak $\left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right\rangle = \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx$

Tedy s předchozích řádků

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_k}, \varphi\right\rangle = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}\varphi\, dx$$

což znamená, že $\frac{\partial T_f}{\partial x_k}$ je regulární distribuce a $T_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}$, což jsme chtěli ukázat.

Ještě jedna poznámka k regulární distribuci.

- Pokud $f, g \in L^1_{loc}$ a $f = g$ s.v. v Ω, pak $T_f = T_g$ v $\mathcal{D}'$.
- Naopak jsou-li T, U dvě regulární distribuce takové, že $T = U$ v $\mathcal{D}'$, pak ($T = T_f$ a $U = U_g$) $f = g$ s.v.

Ověření: $T_f = U_g$ v $\mathcal{D}' \Rightarrow \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \Omega$

to ale implikuje $\int [f(x)-g(x)]\varphi(x)\,dx = 0$ ~~+~~

tedy $f = g$ s.v. v Ω.

Derivace jsou konzistentní pro širší třídu funkcí, viz následující:

$\boxed{\text{Věta 3.1}}$ Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ a

$$g(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_k) - f(x)}{h}$$ existuje a je spojitá vyjma bodu y a $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Potom:

je-li $d \geq 2$, pak $\frac{\partial T_f}{\partial x_k} = g$ v $\mathcal{D}'$

je-li $d = 1$, pak $\frac{\partial T_f}{\partial x_k} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}$ v $\mathcal{D}'$ jen pokud f je spojitá v y.

$\boxed{\text{POUČENÍ}}$ V $d=1$, jsou funkce se skokovou nespojitostí problém, neboť jejich distributivní derivace není regulární distr. Naopak, v $d \geq 2$, nespojitost v jednom bodě není problém, avšak v $d=2$, skoková nespojitost na křivce (úsečce) by byl problém.

Dk V dvou spec. případech.

ⓐ $\boxed{d=1, y=0}$ $\langle \frac{d}{dx} T_f, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \cdots - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \cdots \right\}$$

$$\overset{\text{per partes}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} g(x)\varphi(x) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} g(x)\varphi(x) + \lim \left[f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - f(-\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x) + \left[f(0+) - f(0-) \right] \varphi(0)$$

$$= \langle T_{g = f'}, \varphi \rangle + \underbrace{\left[f(0+) - f(0-) \right] \varphi(0)}_{= 0 \text{ pokud } f(0+) = f(0-).}$$

ⓑ $\boxed{d=2, \frac{\partial}{\partial x_1}}$ $f(x_1, x_2)$ je spojitě diferencovatelná dle x_1 vyjma $(x_1, x_2) = (0,0)$

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_1} T_f, \varphi \rangle = -\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2)\,dx_1 \right) dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \underset{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{g(x_1, x_2)}\, \varphi(x_1, x_2)\,dx_1 \right) dx_2$$

$$= \langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_1}}, \varphi \rangle$$ pro libovolné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

$\boxed{\text{□}}$

Příklady na procvičení

(1) Buď $H(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ (Heavisideova fce) v 0 lze definovat libovolně.

ukažte, že

- $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
- $\langle \frac{d}{dx} T_H, \varphi \rangle \left(= \langle H', \varphi \rangle \right) = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

neboli $\boxed{H' = \delta \text{ v } \mathcal{D}'}$

(2) $\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$

(3) Buď $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ a $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ a existují $f(0+)$ a $f(0-)$. Pak

$$T_f' = \underline{\underline{f'}} = \underline{[f(0+) - f(0+)]\delta + T_{f'}} \quad \text{v } \mathcal{D}'$$

(4) Buď $f(x) = \log|x|$. Pak ukažte, že

- $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
- $(T_f)' = T_{v.p.\frac{1}{x}}$ v $\mathcal{D}'$
- $(T_f)'' = -T_{v.p.\frac{1}{x^2}}$ v $\mathcal{D}'$.

$\boxed{3.3}$ Temperované distribuce a Fourierova transformace

Nejmenší prostor, na kterém jsme doposud zavedli Fourierovu transformaci, byl Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ není pro Fourierovu transformaci vhodný neboť

1) Je-li $0 \neq \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\mathcal{F}[\varphi] \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$
2) (neboli) je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\varphi \equiv 0$.

zatímco

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \text{a platí} \quad f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$$

Připomeňme, že

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \Big\{ \varphi \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hladkost}}}{C^\infty}(\mathbb{R}^d) ;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^d : \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty}_{\substack{\text{rychlý pokles v } \infty \\ \text{(rychlejší než polynomiální)}}} \Big\}$$

Víme také, že $\boxed{e^{-\frac{|x|^2}{2}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$ a $\boxed{\mathcal{F}[e^{-\frac{|x|^2}{2}}](s) = e^{-\frac{|s|^2}{2}}}$

<u>Def.</u> (temperované distribuce) Temperované distribuce jsou spojité lineární funkcionály na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tzn.

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := \{ T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \ (\text{nebo } \mathbb{C}) ;\ T \text{ je lineární, spojitý} \},$$

přičemž spojitost zavedeme takto:

<u>pokud</u> $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ splňuje $p D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}^d$ pro libovolný polynom,

<u>pak</u> $T(\varphi_n) = \langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

<u>Platí</u>

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

přičemž všechny inkluse jsou vlastní. Třetí inkluse není (jak si někteří všimli) úplně v pořádku neboť porovnávám funkce s funkcionály, které si sice odpovídají, ale jsou to jiné objekty. Je to však analogické situaci

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$ kde poslední

inkluse platí za předpokladu, že ztotožním $x \in \mathbb{R}$ s $(x, 0) = x + i0$.

Připomeňme: pro separabilní Hilbertův prostor $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ platí Rieszova věta o reprezentaci, která říká

$$(\forall f \in H')(\exists!\, a \in H)\big(\langle f, \varphi \rangle = (a,\varphi)_H \big)$$

H' … množina všech spoj. lin. funkcionálů na H; $(\cdot,\cdot)_H$ … skalární součin

Navíc $\|f\|_{H'} = \|a\|_H$

Speciálně: $L^2(\Omega)$ a $(L^2(\Omega))'$ lze ztotožnit

Tedy: $\underline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \approx [L^2(\mathbb{R}^d)]' \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)}$

<u>Poznámka</u> Víme, že platí Hölderova nerovnost: $(\forall f \in L^p)(\forall \varphi \in L^{p'})$

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x) \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

což lze zapsat

$$\langle T_f, \varphi \rangle \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Platí:

$$[L^p(\Omega)]' = L^{p'}(\Omega)$$

$p \in [1,\infty]$	p'	duální exponent
$L^p(\Omega)$	$L^{p'}(\Omega)$	duální prostor

<u>Zpět k temperovaným distribucím:</u>

- Zatímco $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$
  tak $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \not\subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

  Př. $f(x) = e^{x^2}$, pak $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{x^2} \varphi(x)\, dx \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d))'$,
  a $T_f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Proč? Neboť pro speciální $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a to $e^{-\frac{x^2}{2}}$ platí

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{x^2}{2}} dx = +\infty.$$

Pro distribuce $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ jsme ukázali platnost čtyř <u>duálních</u> (adjungovaných) identit (1) – (4) (viz strana 3/11), které jsou typu

$$\langle OT, \varphi \rangle = \langle T, S\varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Tyto čtyři identity platí i pro $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ s jediným dodatkem: pro násobení skalárem m potřebujeme nejen hladkost, $m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, ale také <u>nejvýše polynomiální růst</u> v ∞:

$$\boxed{(\exists N \in \mathbb{N})(\exists C > 0): \quad m(x) \le C|x|^N \quad \text{pro } |x| \to \infty},$$

neboť teprve pak $m\varphi \in \mathcal{S}$ pro libovolné $\varphi \in \mathcal{S}$.

Pomocí duální identity zavedeme Fourierovu transformaci pro temperované distribuce. Je-li $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f](s)\varphi(s) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix\cdot s} dx\, \varphi(s)\, ds$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s) e^{ix\cdot s} ds\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mathcal{F}[\varphi](x)\, dx$$

neboli

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Je-li $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, pak definujeme $\mathcal{F}[T]$ dualitou

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$ a platí:

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{\varphi}(x)\, dx$$

Tedy $\hat{f}$ chápano jako Four. transf. pro $f \in L^1$ se shoduje s distribuční Four. transf. f. (také distr. Four. transf. je reg. distribuce).

Navíc, na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ platí inverzní Fourierův vzoreček:

$$\boxed{T = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[T]] \qquad \forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}$$

Dk) Využijeme platnost inverzního Fourierova vzorečku pro $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pro lib. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]] \rangle = \langle \mathcal{F}[T], \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle$$

$$= \langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]], \varphi \rangle$$

neboli

$$\underline{T = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]]}$$

Příklady (1) Buď $T = \delta$. Spočteme $\hat{T}$.

Řešení: Dle definice

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \varphi(s) e^{ix\cdot s}\, ds \Big|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \langle 1, \varphi \rangle$$

Tedy $\underline{\hat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}}$

Připomeňme si, že $\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}] = c\,\frac{\sin s}{s}$. Nyní $\mathcal{F}[\delta] = \text{konst}$

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{|x|^2}{2}}] = e^{-\frac{|s|^2}{2}}$$

f kompaktní nosič $\to$ $\hat{f}$ ztrácí pokles, ale $\hat{f}$ hladké

f bodový nosič $\to$ $\hat{f}$ neklesá v ∞, $\hat{f}$ hladké.

(2) Buď $T = \delta'$. Spočteme $\hat{T}$, kde $'$ značí $\frac{\partial}{\partial x_k}$

Platí

$$\langle \hat{\delta'}, \varphi \rangle = \langle \delta', \hat{\varphi} \rangle = -\langle \delta, (\hat{\varphi})' \rangle$$

$$= -\langle \delta, \widehat{ix_k \varphi} \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \langle ix_k, \varphi \rangle \Rightarrow$$

$$\left[\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s) e^{ix\cdot s}\, ds \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} is_k \varphi(s) e^{ix\cdot s}\, ds \right.$$

$$\left. = \widehat{ix_k \varphi(x)}(x) \right]$$

$$\boxed{\hat{\delta'} = -i \frac{x_k}{(2\pi)^{d/2}}}$$

(3) Spočtěte F. transformaci $e^{i\alpha|x|^2}$ $(\alpha \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$

Řešení $e^{i\alpha|x|^2} \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cup L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, ale $e^{is|x|^2} \notin L^1(\mathbb{R}^d)$ tedy ani $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Zbývá tedy uvažovat f jako temperovanou distribuci.

! OBECNĚ : Definice nám při výpočtu zpravidla NEPOMŮŽE.

POSTUP : Nalézt vhodného kandidáta a poté ověřit, tzn. splňuje identitu.

Víme : $$\boxed{\mathcal{F}\left[e^{-t|x|^2}\right](s) = \frac{1}{(2t)^{d/2}} e^{-|s|^2/4t}} \qquad (*)$$

(viz str. 1/8 a 1/14 nebo přímo z vztahu: $$e^{-\frac{|s|^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{2}} e^{ix\cdot s}\,dx$$)

Do $(*)$ chceme vložit $t = -i\alpha$, což dá

$$\mathcal{F}\left[e^{i\alpha|x|^2}\right](s) = \left(\frac{1}{-2i\alpha}\right)^{d/2} e^{\frac{|s|^2}{4i\alpha}}$$

$$-\frac{1}{2i\alpha} = \frac{i}{2\alpha} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{2\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{-2i\alpha}\right)^{d/2} = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2|\alpha|}}\right)^d & \alpha > 0 \\ \left(\frac{1}{-2i\alpha}\right)^{d/2} = \left(\frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2|\alpha|}}\right)^d & \alpha < 0 \end{cases}$$

Tedy $$\boxed{\mathcal{F}\left[e^{i\alpha|x|^2}\right](s) = \left(\frac{i}{2\alpha}\right)^{d/2} e^{-\frac{i|s|^2}{4\alpha}}}$$

Zbývá ověřit, že platí pro libovolné $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\left\langle e^{i\alpha|x|^2}, \hat{\varphi}\right\rangle = \left(\frac{i}{2\alpha}\right)^{d/2} \left\langle e^{-\frac{i|s|^2}{4\alpha}}, \varphi\right\rangle$$

tj. (?) $$\boxed{\int e^{i\alpha|x|^2}\hat{\varphi}(x)\,dx = \left(\frac{i}{2\alpha}\right)^{d/2} \int e^{-\frac{i|x|^2}{4\alpha}} \varphi(x)\,dx}$$

Pozorujme, že oba integrály jsou konečné.

K důkazu (?) vyjdeme ze vztahu

$$\underbrace{\int e^{-t|x|^2}\hat{\varphi}(x)\,dx = \frac{1}{(2t)^{d/2}} \int e^{-|x|^2/4t} \varphi(x)}$$

a uvažujme dvě funkce $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z|x|^2} \hat{\varphi}(x)\,dx$$

$$G(z) = \frac{1}{(2z)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{4z}} \varphi(x)\,dx$$

Platí: $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Tedy pro $\mathrm{Re}\, z > 0$: $F(z) < \infty$, $G(z) < \infty$.
Z Cauchy-Riemannových podmínek: F, G jsou holomorfní pro $z \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Re}\, z > 0$.

F, G jsou spojité i na hranici $\mathrm{Re}\, z = 0$, $z \neq 0$.

$$F(is) = \lim_{\epsilon \to 0} F(\epsilon + is)$$

$$G(is) = \lim_{\epsilon \to 0} G(\epsilon + is)$$

$G(z) = F(z)$ pro $z = (t, 0) = t + i0$, $t > 0$.
Z věty o jednoznačnosti: $\underline{F(is) = G(is)}$. Q.E.D.

(4) Spočtěte Fourierovu transformaci $f(x) = e^{-t|x|}$, $t > 0$

Řešení: $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, ačkoliv $f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sice klesá dostatečně rychle v ∞, ale není diferencovatelná v 0.
$\in C(\mathbb{R}^d)$

(i) Spočítejme $\mathcal{F}[f]$ nejdříve v $\boxed{d=1}$

$$\boxed{\hat{f}(s)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t|x|} e^{ixs}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(t+is)x}\,dx + \int_0^{\infty} e^{(-t+is)x}\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\frac{e^{(t+is)x}}{t+is} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-t+is)x}}{-t+is} \right]_0^{\infty} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{t+is} + \frac{1}{t-is} \right\} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2t}{t^2+s^2}}$$

Vidíme, že $\hat{f}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ a za takovéto situace platí inverzní Fourierův vzorec

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)$$

což v našem případě dává

$$(*) \quad \boxed{e^{-t|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+s^2} e^{-isx}\,ds}$$

(ii) Ve vyšších dimenzích $\boxed{d>1}$ použijeme jiný (obecný) postup:

ⓐ Napišme $e^{-t|x|}$ (nebo obecně danou f) jako „průměr" Gaussiánů s jistou váhou g, tj.

$$\boxed{(I) \qquad e^{-t|x|} = \int_0^\infty g(s)\, e^{-s|x|^2} ds}$$

ⓑ Pak na (I) aplikujme Fourierovu transformaci, což „formálně" vede k:

$$\mathcal{F}\left[e^{-t|x|}\right](z) = \int_0^\infty g(s)\, \mathcal{F}\left[e^{-s|x|^2}\right](z)\, ds$$

$$= \int_0^\infty g(s) \frac{1}{(2s)^{d/2}} e^{-\frac{|z|^2}{4s}} ds$$

ⓒ Zkusíme spočítat poslední integrál

Zkusme schéma ⓐ–ⓒ použít pro $f(x) = e^{-t|x|}$. Hledejme g tak, že (I) platí. Označme $\lambda = |x| > 0$. Tedy hledáme g tak, že

$$(I') \qquad e^{-t\lambda} = \int_0^\infty g(s)\, e^{-s\lambda^2} ds$$

Povšimněme si vztahu (*) ze str. 3/21 a pomocného výpočtu

$$\int_0^\infty e^{-\beta t^2} e^{-\beta s^2} d\beta = \int_0^\infty e^{-\beta(t^2+s^2)} d\beta = \left[\frac{e^{-\beta(t^2+s^2)}}{t^2+s^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{t^2+s^2}.$$

Tedy z (*):

$$e^{-t|x|} = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{-\beta t^2} e^{-\beta s^2} d\beta\, e^{-isx} ds$$

$$= \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\beta t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta s^2} e^{-isx} ds\, d\beta$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, t \int_0^\infty e^{-\beta t^2} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4\beta}}}{\sqrt{2\beta}} d\beta$$

$$= \frac{t}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\beta}} e^{-\frac{1}{4\beta}|x|^2} d\beta$$

neboli

$$e^{-t\lambda} = \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{\pi\beta}} e^{-\beta t^2} e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}} d\beta \qquad \text{a } (I') \text{ je nalezena.}$$

Vezmeme $\lambda = |x|^2$ $x \in \mathbb{R}^d$ a aplikujme na (I') Four. transf., viz bod (b) schématu.

$$\underline{\underline{\mathcal{F}\left[e^{-t|x|}\right](s)}} = \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\beta}} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{|x|^2}{4\beta}}\right](s)\, d\beta$$

$$= \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{\pi\beta}} e^{-\beta t^2} \left(\sqrt{2\beta}\right)^d e^{-\beta|s|^2}\, d\beta$$

$$y = \beta(t^2+|s|^2) \qquad \beta^{\frac{d-1}{2}} = \frac{y^{\frac{d-1}{2}}}{(t^2+|s|^2)^{\frac{d-1}{2}}}$$

$$d\beta = \frac{dy}{t^2+|s|^2}$$

$$\boxed{\text{Gamma-fce} \quad \Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx}$$

$$= \frac{t}{(t^2+|s|^2)^{\frac{d+1}{2}}} \frac{2^{d/2}}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^\infty y^{\frac{d-1}{2}} e^{-y}\, dy}_{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2^{d/2}}{(\pi)^{1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) t}{(t^2+|s|^2)^{\frac{d+1}{2}}}}}$$

což souhlasí s naším výpočtem pro $d=1$ $(\Gamma(1)=1)$.

Pozoruj:

f klesá rychle v ∞ $\longrightarrow$ $\hat{f}$ hladká

f není hladká v 0 $\longrightarrow$ $\hat{f}$ klesá jen polynomiálně.

Pozorujme také, že

$$\underline{\underline{\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-t|x|}\right](s)}} = \mathcal{F}\left[e^{-t|x|}\right](-s) = \underline{\underline{\frac{2^{d/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) t}{(t^2+|s|^2)^{\frac{d+1}{2}}}}}$$

(5) Spočtěme Fourierovu transformaci $f(x)=|x|^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{C}$,
$0 > \underline{\operatorname{Re}\alpha > -d}$

$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $f\notin L^1(\mathbb{R}^d)$, f však neroste příliš rychle v ∞ $\Rightarrow T_f\in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

K výpočtu Four. transf. $\hat{T}_f$ použijeme schéma z příkladu 4.

(I') Získáme z následujícího výpočtu

$$\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1} e^{-s|x|^2} ds \underset{\uparrow}{=} \int_0^\infty \frac{|x|^{\alpha+2}}{|x|^2} y^{-\frac{\alpha}{2}-1} e^{-y} = |x|^{\alpha}\,\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$s=-\frac{1}{|x|^2} \leftarrow y=-s|x|^2$$
$$ds=-\frac{dy}{|x|^2}$$

přičemž integrál vlevo je konečný jen pro $\alpha<0$.
Uvažujeme tedy $\boxed{-d<\operatorname{Re}\alpha<0}$ a máme

$$|x|^{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1} e^{-s|x|^2} ds \qquad \text{což je (I')}.$$

Tedy

$$\mathcal{F}\left[|x|^{\alpha}\right](z)=\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1}\,\mathcal{F}\left[e^{-s|x|^2}\right](z)\,ds$$

$$=\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1}\cdot\frac{1}{(2s)^{d/2}}\,e^{-\frac{|z|^2}{4s}}\,ds$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^d\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{d}{2}-1}\,e^{-\frac{|z|^2}{4s}}\,ds$$

$y=\frac{|z|^2}{4s}$

$s=\frac{|z|^2}{4y}$

$ds=\frac{-|z|^2}{4y^2}dy$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^d\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty\left(\frac{|z|^2}{4}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{d}{2}-1} y^{\frac{\alpha}{2}+\frac{d}{2}+1}\,e^{-y}\,dy$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^d\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\,\frac{2^{\alpha+d}}{|z|^{\alpha+d}}\int_0^\infty y^{\frac{\alpha}{2}+\frac{d}{2}-1}\,e^{-y}\,dy$$

$$=\underline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^d\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+\frac{d}{2})}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\,\frac{2^{\alpha+d}}{|z|^{\alpha+d}}}$$

Potvrďme, že $\alpha+d$ splňuje $0<\alpha+d<d$.

Speciální případ: $\boxed{\alpha=-1 \text{ a } d=3}$

$$\mathcal{F}\left[|x|^{-1}\right](z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{2^2}{\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{=\sqrt{\pi}}}\,\frac{1}{|z|^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{|z|^2}$$

a tedy

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{|z|^2}\right](x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{|x|}.$$

Konvoluce temperovaných distribucí

Mnoho aplikací zahrnuje konvoluci, kde jeden faktor je temperovaná distribuce. Víme

$$(f*g)(x) = \int f(x-y)\,g(y)\,dy$$

a jsou-li $\varphi,\psi \in \mathcal{S}$ pak $\boxed{\widehat{\varphi*\psi} = \hat{\varphi}\cdot\hat{\psi}}$

Tento vztah nemůže platit pro temper. distribuce, neboť součin distribucí nemáme zaveden, neboť nedává dobrý smysl. Víme však, že má smysl součin $m \in \mathcal{S}$ a temperované distribuce.

$\boxed{\text{Nechť } \psi \in \mathcal{S} \text{ a } T \in \mathcal{S}'}$ K zavedení Fourierovy transformace $\psi * T$ potřebujeme adjungovanou (duální) identitu:

Buď $\psi \in \mathcal{S}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$. Pak

$$\langle \psi*\varphi_1, \varphi_2\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (\psi*\varphi_1)(x)\,\varphi_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y)\,\varphi_1(y)\,\varphi_2(x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y)\,\varphi_2(x)\,dx\right)\varphi_1(y)\,dy$$

$$= \langle \varphi_1, \tilde{\psi}*\varphi_2\rangle \quad \text{kde } \tilde{\psi}(y) = \psi(-y)$$

neboli

$$\boxed{\langle \psi * T, \varphi\rangle = \langle T, \tilde{\psi}*\varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}}$$

Toto je duální identita (6)

Odsud plyne: $\boxed{\mathcal{F}[\psi * T] = (2\pi)^{d/2}\hat{\psi}\,\hat{T}}$ pro $\psi \in \mathcal{S}$ a $T \in \mathcal{S}'$

Dk. Počítejme

$\varphi \in \mathcal{S}$: $\underline{\underline{\langle \mathcal{F}[\psi * T], \varphi\rangle}} \overset{(5)}{=} \langle \psi * T, \hat{\varphi}\rangle \overset{(6)}{=} \langle T, \tilde{\psi} * \hat{\varphi}\rangle$

protože $\tilde{\psi} * \hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, tak platí pro tuto fci Fourierův inverzní vzoreček $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}]] = \tilde{\psi} * \hat{\varphi}$

$$= \langle T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}]]\rangle$$

$$\overset{(5)}{=} \langle \hat{T}, \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}]\rangle$$

F. transf. konvoluce (viz str. 1/10)

$$= \langle \hat{T}, \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}]\, \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}]\rangle (2\pi)^{d/2}$$

$$= \langle \hat{T}, (2\pi)^{d/2}\, \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}]\, \varphi\rangle$$

$$= \langle \hat{T}, (2\pi)^{d/2}\, \hat{\psi}\cdot\varphi\rangle$$

$$= (2\pi)^{d/2}\underline{\underline{\langle \hat{\psi}\hat{T}, \varphi\rangle}}$$, což dává tvrzení

neb platí $\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}](x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\psi}(s) e^{-ix\cdot s}\, ds = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} \psi(-s) e^{-ix\cdot s}\, ds$

$$\underset{\substack{s' := -s \\ ds' = -ds}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int \psi(s') e^{ix\cdot s'}\, ds' = \hat{\psi}(x)$$

(Pozor: Otočím integraci $(-\infty, +\infty) \longrightarrow (+\infty, -\infty)$)

■

Konvoluci $f \in \mathcal{S}'$ s $\psi \in \mathcal{S}$ lze zavést jiným přímočařejším způsobem. Protože pro $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(\psi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y)\, f(y)\, dy \;,$$

můžeme psát

$$(\psi * f)(x) = \langle f, \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle \quad \text{kde } (\tau_{-x}\tilde{\psi})(y) = \tilde{\psi}(y-x) = \psi(x-y)$$

Vyjádření vpravo má však smysl nejen pro $f \in \mathcal{S}$, ale i pro temperované distr. $f \in \mathcal{S}'$.

Navíc zobrazení

$x \longmapsto \langle f, \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle$ definuje funkci, která je C^∞, neb $\tilde{\psi} \in C^\infty$ a platí:

$$D^\alpha_x(\psi * f)(x) = D^\alpha_x \langle f, \tau_{-x}\tilde\psi\rangle = \langle f, D^\alpha_x \tau_{-x}\tilde\psi\rangle = \langle f, D^\alpha_x \psi(x-\cdot)\rangle .$$

Vidíme, že konvoluci $\psi\in\mathcal{S}$ a $f\in\mathcal{S}'$ lze definovat předpisem

$$\boxed{\text{(Definice \#2)}\quad (\psi * f)(x) := \langle f, \tau_{-x}\tilde\psi\rangle}$$

a takto definovaná konvoluce je C^∞-fce (i pro $f\in\mathcal{S}'$)!

Máme dvě definice konvoluce temperované distribuce a hladké funkce. Je vhodné ukázat, že se shodují.

Dk

$$\int_\Omega (\psi*f)(x)\varphi(x) \underset{def.\#2}{=} \int_\Omega \langle f,\tau_{-x}\tilde\psi\rangle\varphi(x)\,dx$$

$\langle \psi*f,\varphi\rangle$ ← hladká fce dle Def. 2

$$= \Big\langle f, \int_\Omega (\tau_{-x}\tilde\psi)\varphi(x)\,dx\Big\rangle = \Big\langle f, \int_\Omega \psi(x-y)\varphi(x)\,dx\Big\rangle = \langle f, \tilde\psi*\varphi\rangle \underset{def\#1}{=} \langle\psi*f,\varphi\rangle .$$

■

<u>Shrnutí</u>: ① Zavedli jsme 2 definice pro konvoluci $\psi\in\mathcal{S}$ a $f\in\mathcal{S}'$. Tyto definice se shodují. Ta druhá ukazuje průzračně, že KONVOLUCE JE ZHLAZUJÍCÍ PROCES. Vezměme speciálně Diracovu distribuci. Pak

$$(\psi*\delta)(x) = \langle\delta,\tau_{-x}\tilde\psi\rangle = \psi(x-y)\big|_{y=0} = \psi(x)$$

Tedy $\boxed{\psi*\delta=\psi}$ (což koresponduje mj. s výpočtem: $\widehat{\psi*\delta} = \hat\psi\cdot\hat\delta = \hat\psi\cdot 1 = \hat\psi$)

② KONVOLUCE JE ČASTÁ OPERACE. NAPŘ.

(i) <u>Derivování</u> je speciální případ distribuce, neboť

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\psi*\delta) = \frac{\partial\psi}{\partial x_k}*\delta$$

(ii) <u>Fourierův inverzní vzorec</u> lze interpretovat jako spec. případ konvoluce.

Platí: $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f\}](x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \bar{e}^{\,is\cdot x}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,e^{isy}\,dy\,ds$

$\boxed{f\in\mathcal{S}}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\int_{\mathbb{R}^d}\bar{e}^{\,is\cdot(x-y)}\,ds\,dy = (f*g)(x) \quad \text{kde } g(x) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\cdot x}\,ds$$

Avšak $g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\mathcal{F}^{-1}[1](x) \underset{\text{Př. ①, str. 3/20}}{=} \delta$ (g tedy není fce, ale distribuce)

a tedy platí

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f*\delta = f$$

což je "jiný" důkaz Fourierova inverzního vzorce.

Také jsme ukázali: $\delta = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\bar{e}^{\,is\cdot x}\,ds$

3.5. Regularizace (zhlazování) a jeho vlastnosti

Buď
$$\boxed{w(x) = \begin{cases} C e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{pro } |x| < 1 \\ 0 & \text{pro } |x| \geq 1 \end{cases}}$$
kde $C>0$ je takové, že $\int_{\mathbb{R}^d} w(x) = 1$

Pak
- $w \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\operatorname{supp} w = \overline{B_1(0)}$

Tedy
- $\underline{w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$ a navíc $\underline{w(x) = w(-x)}$ a $\underline{w \geq 0}$.

Nyní sestrojíme ∞-mnoho funkcí z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ škálováním a posunutím. Definujme
$$\boxed{w_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)} \qquad \varepsilon \in (0,\infty)$$

Pak
- $w_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$; $\operatorname{supp} w_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$; $\int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(x)\,dx = 1$, $w_\varepsilon(-x) = w_\varepsilon(x)$

Také
- $\underline{\tau_y w_\varepsilon(x)} = \underline{w_\varepsilon(x-y)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} \tau_{-y} w_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(y)}$,

a také $\underline{w_\varepsilon(x-y) = w_\varepsilon(y-x)}$

Platí následující tvrzení

Věta 3.1 Buď $p \in [1,\infty)$.

(i) Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f_\varepsilon := w_\varepsilon * f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a platí

(i1) $\|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ a $f_\varepsilon \to f$ a.e. in $\mathbb{R}^d$ pro $\varepsilon \to 0+$

(i2) $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ pro $\varepsilon \to 0+$

(ii) Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Pak $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustý v $L^p(\Omega)$.

(iii) Je-li $f \in C(\Omega)$ a $\operatorname{supp} f \subset \Omega$ je kompaktní, pak
$$f_\varepsilon \rightrightarrows f \text{ v } \Omega.$$

Dk $\boxed{\text{Ad (i1)}}$ Z důkazu Věty 1.1. plyne

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p} = \|\omega_\varepsilon * f\|_{L^p} \le \|\omega_\varepsilon\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

neboť $\|\omega_\varepsilon\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\omega_\varepsilon(x)}_{\geq 0} dx = 1$, což dává část tvrzení (i1).

Skutečnost, že $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ je jasná resp. ponechána čtenáři.

Dále, dle věty o Lebesgueových bodech (viz níže) platí

$$(\clubsuit) \qquad \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|\, dy = 0 \quad \text{pro s.v. } x \in \mathbb{R}^d.$$

Pro tato x platí

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \omega_\varepsilon(x-y)[f(y)-f(x)]\, dy \right|$$

neboť

- $\operatorname{supp} \omega_\varepsilon(x-\cdot) = \overline{B_\varepsilon(x)}$

a

- $\int_{\mathbb{R}^d} \omega_\varepsilon(x-y)\, dy = 1$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{B_\varepsilon(x)} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) |f(y)-f(x)|\, dy$$

$$\le c\, \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y)-f(x)|\, dy \to 0$$

dle $(\clubsuit)$.

Tedy (i1) je dokázáno.

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ Je-li $f \in C(\Omega)$ a $\operatorname{supp} f$ je kompaktní v Ω, pak f je stejnoměrně spojitá: k danému $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tak, že $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ kdykoliv $|x-y| < \delta$. Pak z předchozího výpočtu plyne, že

$$\sup_{x \in \operatorname{supp} f} |f_\varepsilon(x) - f(x)| \le c\varepsilon.$$

Tedy $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ v Ω.

$\boxed{\text{Ad (i2)}}$ Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $\exists g \in C(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} g$ je kompaktní tak, že $\|f-g\|_{L^p} < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je dáno libovolně. Pak $\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p} \le \|f-g\|_{L^p} < \varepsilon$ dle (i1), a $g_\varepsilon \rightrightarrows g$ v $\mathbb{R}^d$. Tudíž

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g-g_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$$\le 2\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + c\|g-g_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

! supp g, g_ε je kompaktní

$$\le (2+c)\,\varepsilon.$$

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ plyne z předchozího, neb

Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f\chi_{[-N,N]} \xrightarrow[N\to\infty]{} f$ v $L^p(\mathbb{R}^d)$

a $f\chi_{[-N,N]}$ má kompaktní nosič. Tedy

$(f\chi_{[-N,N]})_\varepsilon \to f\chi_{[-N,N]}$ pro $\varepsilon \to 0$.

Tyto dvě konvergence dávají hustotu. ▨

V teorii míry platí následující důležitá věta, která říká, že každá integrovatelná funkce je "přibližně spojitá" ve skoro všech bodech.

$\boxed{\text{Věta}}$ (O Lebesgueových bodech) Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Pak

(i) Pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d$: $\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)\,dy \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(x)$

(ii) —||— $\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)} |f(y)-f(x)|\,dy \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

Navíc, je-li $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, pak:

Pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d$: $\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int |f(y)-f(x)|^p\,dy \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

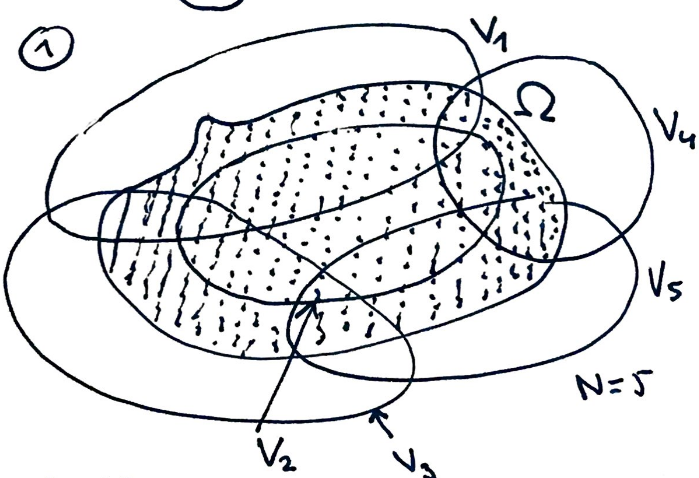
Často je výhodné studium chování globálně definovaného objektu lokalizovat. S lokalizací je spojen pojem: „rozdělení jednoty" (partition of unity). Platí

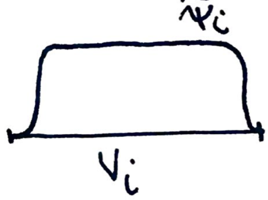
$\boxed{\text{Tvrzení}}$ (o rozdělení jednoty) Buď Ω omezená a $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_i$ (otevřené pokrytí $\overline{\Omega}$ konečné), V_i otevřené.

Pak $\exists\, \psi_i \in \mathcal{D}(V_i)$ ... C^∞-fce s nosičem v V_i taková, že

$$\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega.$$

Dk kresbou.

① 

② 

Na $\forall V_i$ sestrojím $\tilde{\psi}_i \in \mathcal{D}(V_i)$

③ $$\psi_i := \frac{\tilde{\psi}_i}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{\psi}_i}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) = 1. \quad \blacksquare$$

Platí $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{5} V_i$, V_i otevřené

LOKALIZACE: $\underbrace{f \in L^p(\Omega)}_{\text{globální}} \Rightarrow f = f \cdot 1 = f \sum_{i=1}^{N} \psi_i = \sum_{i=1}^{N} f\psi_i$ a $f\psi_i \in \underbrace{L^p(V_i)}_{\text{lokální}}$

$\boxed{\text{Věta}}$ 3.2 (Schwartzova věta o nemožnosti zavést násobení distribucí)

Nelze na $\mathcal{D}'$ zavést násobení tak, aby bylo komutativní, asociativní a platilo $x\delta = 0$ a $x T_{v.p.\frac{1}{x}} = 1$.

Připomeň:
- $\langle x\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, x\varphi \rangle = 0\varphi(0) = 0$
- $\langle x T_{v.p.\frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \langle T_{v.p.\frac{1}{x}}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{x\varphi(x)}{x} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) = \langle 1, \varphi \rangle$

Dk Sporem. Nechť takové násobení lze zavést. Pak

$$0 = 0\, T_{v.p.\frac{1}{x}} = (x\delta)\, T_{v.p.\frac{1}{x}} = \delta (x T_{v.p.\frac{1}{x}}) = \delta 1 = \delta,$$

což je spor. $\blacksquare$

$\boxed{\text{NOSIČ DISTRIBUCE}}$ Víme, že nosič fce je množina bodů, v jejichž okolí se s f něco zajímavého děje; přesněji

$supp\, f := \overline{\{x \in \Omega ;\ f(x) \neq 0\}}$ - uzávěr množiny bodů, ve kterých je f nenulová.

Protože distribuce jsou definovány na funkcích, nelze mluvit o hodnotách distribuce v bodě. Nosič distribuce je tak třeba zavést opatrněji:

Buď $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a $G \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřené množiny.

Pak T_G definovaná takto $\langle T_G, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$

je distribuce na G, tzn. $T_G \in \mathcal{D}'(G)$.

Řekneme, že
- $\underline{T \text{ vymizí na } G} \overset{df.}{\equiv} \langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$
- $\underline{T = S \text{ na } G} \equiv \langle T - S, \varphi \rangle = 0$ —"—

Pokud T vymizí na každém G_α, kde G_α je prvek ze souboru otevřených množin, pak T vymizí na jejich sjednocení. [Lze nahlédnout pomocí tvrzení o rozdělení jednotky str. 3/32 použitím na Ω = vnitřek nosiče fce φ, kde $\varphi \in \mathcal{D}(\bigcup_\alpha G_\alpha)$]

Tedy existuje největší množ. N_T: T vymizí na N_T.
Pak $\underline{\text{nosič distribuce } T}$ je definován jako doplněk N_T tj $\mathbb{R}^d \setminus N_T$.

(Př.) Určete nosič δ $\left(\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\right)$

Zjevně $\langle \delta, \varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Tedy nosič $\delta = \{0\}$.

$\boxed{\text{KARTÉZSKÝ SOUČIN DISTRIBUCÍ}}$ Buď $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^p)$

pak lze definovat součin $f \otimes g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{d+p})$ předpisem

$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)\, g(y) \qquad (x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^p)$$

Odtud

$$\langle f \otimes g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x) g(y) \varphi(x,y)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^p} g(y) \varphi(x,y)\, dy \right)}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} dx$$

$$= \langle f, \langle g, \varphi(x, \cdot) \rangle \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+p})$$

Tento vztah zobecníme a definujeme:

Je-li $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ a $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$, pak

$T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+p})$ je definováno vztahem

$$\langle T \otimes S, \varphi \rangle = \langle T, \langle S, \varphi(x, \cdot) \rangle \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+p})$$

KONVOLUCE DISTRIBUCÍ POTŘETÍ

Na stranách 3/26 - 3/28 jsme zavedli konvoluci distribuce f a fce $\varphi \in \mathcal{S}$. V některých případech lze však pojem konvoluce dvou distribucí, což si nyní uděláme.

Pro $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$: $(f * g)(x) \stackrel{df.}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$

a $$\langle f * g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \varphi(x) \, dy \, dx$$

$$\underset{\substack{z = x-y \\ \varphi(x) = \varphi(z+y)}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(z) \varphi(y+z) \, dy \, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}} (f \otimes g)(y,z) \, \varphi_*(y+z) \, dy \, dz$$

$$= \langle f \otimes g, \varphi_* \rangle \quad \text{kde } \varphi_*(y,z) = \varphi(y+z)$$

$$\text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

Problém: $\varphi_* \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+p})$ neboť zůstává neomezená v druhé proměnné (jen posunutí)

<u>Příklad</u> Buď $T = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a $S = \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$,

$\mathbb{R}$: čas, $\mathbb{R}^d$: prostor

Pak $T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})$ se poznačí $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})$

lze též symbolicky psát

$\delta(t,x) = \delta(t) \otimes \delta(x)$ nebo méně přesně $\delta(t,x) = \delta(t)\delta(x)$.

Tento problém lze odstranit pokud víme více o nosiči jedné či obou distribucí. Platí (viz Černý, Pokorný MaF V, str. 108-110

<u>Věta 3.3</u> (O existenci konvoluce distribucí). Buď $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

(1) Pokud S má kompaktní nosič, pak $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ a platí

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, \eta \varphi_* \rangle$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ splňující $\eta \equiv 1$ na okolí supp S.

(1') totéž platí je-li $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ a $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ má kompaktní nosič.

---

(2) Je-li $d = 1$ a supp T a supp S jsou zleva omezené. Pak $T * S$ existuje a platí

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, \xi \eta \varphi_* \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

kde ξ, η jsou libovolné takové, že jsou $\equiv 1$ na supp T resp. supp S a $\eta = \xi \equiv 0$ na nějakém $(-\infty, -k)$.

Dk viz Černý, Pokorný.

<u>Příklad</u> Platí pro lib. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ a $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\langle \delta * T, \varphi \rangle = \langle \delta \otimes T, \varphi_* \eta \rangle = \langle T \otimes \delta, \varphi_* \eta \rangle =$$

$$= \langle T, \langle \delta, \varphi_* \rangle \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Tedy $\delta * T = T$. $\boxed{\text{Σ}}$