Úkol 1

Příklad 1
Pro všechny funkce $y = y(x)$ patřící do prostoru $C^3([0,1])$ spočti Gateauxův diferenciál funkcionálu
$$\Phi(y) = \int_0^1 \left(x^2 \sin(\pi y) + (y')^3 + y''y''' + ye^{-(y'')^2} \right) \, \mathrm{d}x.$$

Příklad 2
Pro všechny funkce $y = y(x)$ patřící do prostoru $C^1([0,1])$ spočti Fréchetův diferenciál funkcionálu
$$\Phi(y) = \int_0^1 x^2 \left(y^4 - (y')^2 \right) \, \mathrm{d}x.$$

Hint: Spočti $\delta\Phi(y)(h)$, tedy Gateauxův diferenciál $\Phi(y)$ ve směru $h \in C_0^1([0,1])$, a ověř, že splňuje definici
$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\Phi(y+h) - \Phi(y) - \delta\Phi(y)(h)}{\|h\|} = 0,$$
kde pro každou funkci $\tilde{y} \in C^1([0,1])$ je definována
$$\|\tilde{y}\| = \|\tilde{y}\|_{C^1([0,1])} := \max_{x \in [0,1]} \left(|\tilde{y}(x)| + |\tilde{y}'(x)| \right).$$

Příklad 3
Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Najdi extremálu $y_0 \in \{y \in C^1([0,1]);\ y(0) = a, y(1) = b\}$ funkcionálu
$$\Phi(y) = \int_0^1 \left(2e^x y + y^2 + (y')^2 \right) \, \mathrm{d}x.$$