Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	**Celkem bodů**
Body	12	12	24
Získáno			

[12] 1. Buď $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a jednoduše souvislá (tj. souvislá "bez děr").

1. Zformulujte a dokažte tvrzení, které charakterizuje vlastnost $\underline{f \in H(\Omega)}$ pomocí tzv. Cauchy-Riemannových podmínek.
2. Doplňte tvrzení: *Je-li $f'(z) = 0$ pro každé $z \in \Omega$, pak* .... Tvrzení dokažte.
3. Pro $f \in H(\Omega)$, zaveďte primitivní funkci F k f a ukažte, že vámi zavedená definice F nezávisí na volbě křivky, která by se měla v definici F objevit. Také ukažte, že skutečně vámi zavedená funkce F je primitivní k f v Ω.
4. Je-li $f \in H(B_R(z_0))$, co lze pak říci o tvaru a konvergenci mocninné a Taylorovy řady f v bodě z_0. Uveďte všechny možné tvary jakými lze popsat koeficienty těchto řad.
5. Je-li $f \in H(\mathbb{C})$ a existuje $C > 0$ tak, že $|f(z)| \leq CR$ pro $|z| = R$ a $R >> 1$ libovolné. Co lze pak říci o tvaru f? Dokažte.
6. Co znamená, že f je meromorfní v Ω. Zformulujte a dokažte reziduovou větu.

[12] 2.

1. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $m \in C^\infty(\Omega)$. Uveďte definice:
   - $T \in D'(\Omega)$;
   - $T_n \to T$ in $D'(\Omega)$;
   - mT pro $T \in D'(\Omega)$;
   - $\frac{\partial^{(3)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s} T$ pro $T \in D'(\Omega)$.

   Platí vztah $\frac{\partial^{(3)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s} T = \frac{\partial^{(3)}}{\partial x_j \partial x_s \partial x_i} T$, kde $i, j, s \in \{1, \ldots, d\}$ jsou pevné, ale libovolné?

2. Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zadefinujte Fourierovu transformaci $\widehat{f}$ a rozhodněte (tzn. dokažte nebo uveďte protipříklad), zda platí:
   - $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$;
   - $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$;
   - $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$;
   - $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

   Pro $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ odvoďte vzorce pro $\widehat{\Delta_x f}$ a $\Delta_s \widehat{f}$, kde $\Delta_y g := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^{(2)} g}{\partial y_i^2}$ je Laplaceův operátor aplikovaný na funkci g proměnné y.

3. Pro $f,\ g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, zadefinujte jejich součin fg a konvoluci $f * g$. Rozhodněte (tzn. dokažte nebo uveďte protipříklad), zda platí:
   - Jsou-li $f,\ g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
   - Jsou-li $f,\ g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Napište a dokažte vzorec pro Fourierovu transformaci konvoluce, tj. $\widehat{f * g}$.