NOFY151, ZS 2019-2020 Teoretická část zkouškové písemné práce 7. února 2020

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	Celkem bodů
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

[8] 1. Buď f **nerostoucí** funkce na omezeném intervalu (a,b). Symbol $f[(a,b)]$ označuje obraz (a,b) funkcí f. Nechť
$$\inf f[(a,b)] = -\infty \quad \text{a} \quad \sup f[(a,b)] = A \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(1) • Uveďte definici $f[(a,b)]$ pomocí matematických symbolů.

(2) • Uveďte definici suprema množniny $f[(a,b)]$, výše označenou $\sup f[(a,b)]$.

(3) • Uveďte definici infima množniny $f[(a,b)]$, výše označenou $\inf f[(a,b)]$.

(4) • V situaci popsané v (1) rozhodněte, zda existují $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$ a pokud existují, čemu se rovnají.

(5) • Vaše tvrzení z předchozího bodu týkající se $\lim_{x\to a+} f(x)$ dokažte.

(6) • Uveďte také obecnou definici (tj. zahrnující vlastní i nevlastní limity) symbolu $\lim_{x\to a+} f(x) = L$, kde $L \in \mathbb{R}^*$.

Řešení

[1b] (1) $f[(a,b)] = \{y \in \mathbb{R} ; \exists x \in (a,b) \ y = f(x)\} = \{f(x) ; x \in (a,b)\}$

[1b] (2) $S := \sup f[(a,b)] \overset{df.}{\equiv} \cdot \ \forall x \in (a,b) \ \ f(x) \leq S$
$\cdot \ (\forall S' < S)(\exists x' \in (a,b)) \ \ f(x') > S'$

[1b] (3) $I := \inf f[(a,b)] \overset{df.}{\equiv} \cdot \ \forall x \in (a,b) \ \ f(x) \geq I$
$\cdot \ (\forall I' > I)(\exists x'' \in (a,b)) \ \ I \leq f(x'') < I'$

[1b] (4) Obě limity existují a platí:
$\lim_{x\to a+} f(x) = A$ a $\lim_{x\to b-} f(x) = -\infty$

[3b] (5) Máme ukázat:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (a, a+\delta) \ \ A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$
Avšak: $f(x) < A + \varepsilon$ platí vždy neboť $f(x) \leq A$ $\forall x \in (a,b)$ [1] ↑ sup.
Dále, z definice suprema & $A - \varepsilon$ [1]
existuje $x' \in (a,b)$ takové, že $f(x') > A - \varepsilon$
Položme $\delta = x' - a$. Pak z monotónie $\forall x \in (a, \underset{x'}{\underbrace{a+\delta}})$
$f(x) \geq f(x')$ a máme druhou nerovnost. [1]

[1b] (6) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a+\delta)) \ \ f(x) \in U_\varepsilon(L)$
• je-li $L \in \mathbb{R}$, pak $U_\varepsilon(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$
je-li $L = -\infty$, pak $U_\varepsilon(L) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$
je-li $L = +\infty$, pak $U_\varepsilon(L) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$.

[8] 2.
- Zadefinujte pojem primitivní funkce F k dané funkci $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.
- Zformulujte přesně obě věty o substituci pro nalezení primitivní funkce.
- Věty dokažte.

[1b] • Definice $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ je P.F. k f na (a,b) $\overset{df.}{\equiv}$ $\forall x \in (a,b) : F'(x) = f(x)$

• První věta o substituci

[2b] Nechť (i) F je prim. fce k f na (a,b)

(ii) $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ a $\varphi'(t)$ existuje pro $\forall t \in (\alpha,\beta)$

Pak $F \circ \varphi$ je prim. fce k $(f\circ\varphi)\varphi'$ na (α,β).

[1b] Dk Derivování a využitím věty o derivování složeného zobrazení:

$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) \underset{\text{předp.}}{=} f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \quad \forall t \in (\alpha,\beta)$, c.b.d. $\boxtimes$

• Druhá věta o substituci

[2b] Nechť (i) Φ je prim. fce k $(f\circ\varphi)\varphi'$ na (α,β)

(ii) $\varphi : (\alpha,\beta) \xrightarrow{\text{na}} (a,b)$ postač. a $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t \in (\alpha,\beta)$

Pak $\Phi\circ\varphi^{-1}$ je prim. fce k f na (a,b).

Dk Přímým derivováním a využitím vět o derivování složené fce a derivování inverzní fce. Máme

[2b] $$(\Phi\circ\varphi^{-1})'(x) = \Phi'(\varphi^{-1}(x))\,(\varphi^{-1})'(x) \underset{\text{předpoklad na }\Phi}{=} f(\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(x))}_{=x})\,\varphi'(\varphi^{-1}(x))\,\frac{1}{\underbrace{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}_{\neq 0}} = f(x). \quad \boxtimes$$

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$$

[8] 3. 1. Uveďte definici složeného zobrazení $g \circ f$ pro dvě dané reálné funkce reálné proměnné značené f a g. Součástí odpovědi je samozřejmě i stanovení předpokladů na f a g, aby definice složeného zobrazení měla smysl.

2. Zformulujte a dokažte větu o limitě složené funkce (za silnějších předpokladů na vnější funkci).

3. Rozhodněte, který z následujících výroků je pravdivý:
   - Jestliže existuje $\lim_{x\to 0} \sqrt{f(x)}$, pak existuje $\lim_{x\to 0} f(x)$.
   - Jestliže existuje $\lim_{x\to 0} f(x)$, pak existuje $\lim_{x\to 0} \sqrt{f(x)}$.
   - Jestliže existuje $\lim_{x\to 0} f(x)$, pak existuje $\lim_{x\to 0} \operatorname{sign} f(x)$

   Svou odpověď vždy odůvodněte.

4. Zformulujte a dokažte větu o derivování složeného zobrazení $g \circ f$.

[1b] (1.) $\left[\begin{array}{l} f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \text{tak, že } H_f \cap D_g \neq \emptyset \end{array}\right] \Rightarrow$ $(g\circ f)(x) \stackrel{df}{=} g(f(x))$ $\forall x\in D_f$ takové, že $f(x)\in D_g$

[1b] (2) Věta: Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ $\left.\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x)) = g(A)$

Nechť g je spojitá v A

Dk Cíl: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in P_\delta(a)$ $g(f(x)) \in U_\varepsilon(g(A))$

[2b] Avšak víme:

- $\underline{\forall \varepsilon>0}\ \exists \eta>0\ \forall y\in U_\eta(A)$ $g(y)\in U_\varepsilon(g(A))$
- $\underline{\forall \eta>0}\ \underline{\exists \delta>0}\ \underline{\forall x\in P_\delta(a)}$ $f(x)\in U_\eta(A)$

což dává cílové tvrzení

[1] (3) • $g(y)=y^2$ spojitá, z předpokladu $f(x)\geq 0$ v okolí 0.

ANO, aplikuji Větu pro $F(x)=\sqrt{f(x)}$, $G(y)=y^2$.

[0.5] • NE, neboť $f(x)$ může obecně nabývat zápornýchhodnot v lib. $P_\delta(0)$ a pak $\sqrt{f(x)}$ není definováno.

Ale tvrzení platí předpokládáme-li $f(x)\geq 0$ v jistém $P_\delta(0)$.

[0.5] • NEPLATÍ, např. $f(x)=x^3$, pak $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} x$ nemá v 0 limitu.

[1] (4) Věta (o derivování složeného zobrazení – řetízkové pravidlo)

Nechť existuje $f'(x)$ a existuje $g'(y)$ pro $y=f(x)$. Pak existuje $(g\circ f)'(x)$ a platí $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$.

[1,0] Dk Chci "opravit"

"stačí" uvést alespoň ideu

$$(*)\quad \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

kde u prvního zlomku vpravo nevím, že jmenovatel je nenulový. Definuji tedy

$$H(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(f(x))}{y-f(x)} & y\neq f(x) \\ g'(f(x)) & y = f(x) \end{cases}.$$

Pak pro $f(x+h)\neq f(x)$ platí vzoreček (*) a limitním přechodem (H spojitá v $f(x)$) dostanu tvrzení.