16. FOURIEROVA TRANSFORMACE V $L^1(\mathbb{R}^d)$, V $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a V $L^2(\mathbb{R}^d)$

Nejdříve si řekneme, co znamená obecně TRANSFORMACE či přesněji INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE. Poté si "odvodíme" FOURIEROVU transformaci pomocí FOURIERových řad.

Integrální TRANSFORMACÍ funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s jádrem $k: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nazveme funkci $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definovanou vztahem

$$g(w) := \int_E f(t) k(t, w)\, dt,$$

kde $E \subset \mathbb{R}$ je měřitelná množina.*)

Použijeme-li TRANSFORMACI na nějaký objekt (např. ODR, PDR či IDR) lze získat rovnici jednodušší (např. algebraickou či obyčejnou dif. rovnici v případě PDR či IDR), kterou snadno vyřešíme. AVŠAK, řešení je obraz řešení původního objektu. K úspěchu procesu hledání řešení pomocí transformace tedy potřebujeme umět transformaci invertovat.

[MOTIVACE SMĚREM K DEFINICI FOUR. TRANSFORMACE]

Uvažujme 2π-periodickou hladkou funkci $f: (0, 2\pi) \to \mathbb{C}$. Pak

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \\ c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx, \\ &\text{a platí} \\ \|f\|^2_{L^2(0,2\pi)} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

! Připomeňte si, proč vztahy (1) platí a jak jsme je získali.

---

* V aplikacích reziduové věty jsme uvedli pojem Mellinova transformace pro $\boxed{I(a) = \int_0^\infty z^{a-1} f(z)\, dz}$

Mellinova transformace přiřadí fci f jinou funkci I. Jádro $k(z, a) = z^{a-1}$.

Je-li $\tilde{f}$ hladká, avšak ℓ-periodická, nemusím si vztahy analogické (1) pamatovat; snadno je odvodím záměnou proměnných. Vskutku:

je-li $\tilde{f}(x+\ell) = \tilde{f}(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, pak $F(x) := \tilde{f}\left(\frac{\ell}{2\pi}x\right)$ splňuje

$$F(x+2\pi) = \tilde{f}\left(\frac{\ell}{2\pi}(x+2\pi)\right) = \tilde{f}\left(\frac{\ell x}{2\pi}+\ell\right) = \tilde{f}\left(\frac{\ell x}{2\pi}\right) = F(x);$$

tedy F je 2π-periodická a splňuje vztahy (1), tj.

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\ c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx}\,dx \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 &= \|F\|^2_{L^2(0,2\pi)} = \|F\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

Přechodem od F k $\tilde{f}$ $\left(F(x) = \tilde{f}\left(\frac{\ell}{2\pi}x\right)\right)$ a substitucí $y = \frac{\ell x}{2\pi}$, následovaným přeznačením y zpět na x, dostáváme

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\frac{2\pi}{\ell}kx}}{\sqrt{2\pi}} \\ c_k &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \tilde{f}(x) e^{-i\frac{2\pi}{\ell}kx}\,dx \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 &= \frac{2\pi}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} |\tilde{f}(x)|^2\,dx \end{aligned}\right\} \quad (2)}$$

Uvažujme nyní f, která není periodická, ale je definována na $\mathbb{R}$. Pak $f|_{(-\frac{\ell}{2},\frac{\ell}{2})}$, tj. f zúžená na interval $\left(-\frac{\ell}{2},\frac{\ell}{2}\right)$ pro $\ell \gg 1$, může být rozšířena na $\mathbb{R}$, ℓ-periodicky a pro tuto ℓ-periodickou fci platí vztahy (2). Chceme zkoumat chování (2) pro $\ell \to \infty$. K tomuto cíli označíme

$$\boxed{f := \sqrt{2\pi}\,\tilde{f}} \qquad \boxed{\xi_k := \frac{k}{\ell}} \quad \text{a} \quad \boxed{g(\xi_k) := \ell c_k}$$

[jedná se o malinko odlišné označení dvou posloupností]

Pak z (2) dostáváme

$$(3)\quad \left[\begin{aligned} g(\xi_k) &= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x)\, e^{-i2\pi\xi_k x}\, dx, \\ f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(\xi_k)\, \frac{e^{i2\pi\xi_k x}}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{\ell} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(\xi_k)\, e^{i2\pi\xi_k x}(\xi_k - \xi_{k-1}), \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |g(\xi_k)|^2 \underbrace{(\xi_k - \xi_{k-1})}_{\frac{1}{\ell}} &= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} |f(x)|^2\, dx, \end{aligned}\right]$$

což dává formálně pro $\ell \to \infty$

$$(4)\quad \boxed{\begin{aligned} g(\xi) &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i2\pi\xi x}\, dx \\ f(x) &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, e^{i2\pi\xi x}\, d\xi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi)|^2\, d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx \end{aligned}}$$

Tyto nádherné formule úvahy nás přivádí k následující definici a následujícím:

Definice Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. Definujme:

- Fourierovu transformaci f, značenou $\mathcal{F}[f]$ či $\hat{f}$, vztahem

$$(FT)\quad \boxed{\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i2\pi\xi\cdot x}\, dx} \qquad \xi \in \mathbb{R}^d,\ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$$

$$x\cdot\xi := \sum_{j=1}^{d} x_j \xi_j$$

- Inverzní Fourierovu transformaci, značenou $\mathcal{F}^{-1}[f]$ či $\check{f}$, vztahem

$$(IFT)\quad \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, e^{i2\pi\xi\cdot x}\, d\xi$$

Pokud nespecifikujeme, jaké vlastnosti má mít f, aby integrály ve výše uvedené definici byly konečné, je tato definice formální – nic nedefinuje, jen zavádí značení.

Naše úvahy, které nás přivedly k (4), naznačují, že lze očekávat platnost těchto vztahů

$$(5)\quad \boxed{\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f]) = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]] = f}$$ tzv. FOURIERŮV INVERZNÍ VZOREC

a

$$(6)\quad \boxed{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$$ PARSEVALOVA nebo PLANCHERELOVA IDENTITA

Našim cílem bude identifikace tříd funkcí, pro které vzorečky pro Fourierovu transformaci (F_T) a její inverzi (IF_T) spolu se vztahy (5) a (6) platí. Ukážeme si na chvíli, že obecně prostor $L^1(\mathbb{R}^d)$ dává smysl vztahům (F_T) i (IF_T), ale (5) ani (6) pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ platit nemusí. Tedy $L^1(\mathbb{R}^d)$ NENÍ obecně vhodný prostor.

Na druhou stranu byly vztahy (F_T), (IF_T), (5) a (6) získány (heuristicky) z Fourierových řad. Víme z minulého semestru, že vztah

$$f(x) = \sum c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$ platí pro s.v. $x \in \mathbb{R}$ pokud $f \in L^2_{per}$.

Je-li navíc f hladká, pak tvrzení platí všude.

mají: $f, f' \in L^2_{per}$ — nebo po částech C^1 a spojitá

Tedy L^2-fce a hladké funkce by mohly být vhodné prostory. Ukážeme si skutečně, že $L^2(\mathbb{R}^d)$ bude "dobrý" prostor, kde vztahy (5) a (6) platí, ale postup k tomuto prostoru bude komplikovanější. Důvodem je skutečnost, že množina $\mathbb{R}^d$ je neomezená a samotná hladkost fcí existenci integrálů přes $\mathbb{R}^d$ nezaručuje. Budeme muset přidat dostatečný pokles v ∞. Tento požadavek nás přivede k definici Schwartzova prostoru $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, viz také příklad 3.

$\boxed{\text{Nechť nyní } f \in L^1(\mathbb{R}^d).}$

Pak $$|\hat{f}(s)| = |\mathcal{F}[f](s)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i2\pi s x}\, dx \right| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

Tedy $\forall s \in \mathbb{R}^d$: $|\hat{f}(s)| < \infty$ a vzorec (F_T) má smysl

Také vidíme, že

▶ $\boxed{\sup_{s\in\mathbb{R}^d} |\hat{f}(s)| \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}$ a tedy $\boxed{\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)}$

Dokonce,

▶ $\boxed{\hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)}$ což plyne z věty o záměně $\int$ a limity.

Nyní si spočteme dva příklady na Fourierovu transformaci. Hned ten první ukazuje, že L^1-prostor není "uzavřený" na Fourierovu transformaci, neboli pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zjistíme, že $\hat{f}$ prvkem $L^1(\mathbb{R}^d)$ není!!

(Př. 1) Funkce $f \overset{df.}{=} \chi_{[-1,1]} = \begin{cases} 1 & \text{na } [-1,1] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ patří do $L^1(\mathbb{R})$.

Pro F.T. platí: $$\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = \int_{-1}^{1} e^{-i2\pi sx}\,dx = \int_{-1}^{1} \cos 2\pi sx\,dx - i\underbrace{\int_{-1}^{1} \sin 2\pi sx\,dx}_{=0 \text{ (lichá funkce)}}$$

$$= \left[\frac{\sin 2\pi sx}{2\pi s}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sin 2\pi s}{\pi s}$$

Funkce $s \longmapsto \frac{\sin 2\pi s}{\pi s}$ nemá Lebesgueův integrál $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin 2\pi s|}{|\pi s|}\,dx = \infty\right)$

Také si všimněme, že ① ačkoliv f je nenulová jen na $\langle -1,1\rangle$, tak $\hat{f}$ je nenulová všude. Neplatí tedy, že F.T. fce s kompaktním nosičem ($\operatorname{supp} f := \overline{\{x\in\mathbb{R};\, f(x)\neq 0\}}$) má kompaktní nosič.

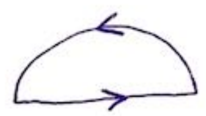
② $\lim_{s\to\infty} \mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = 0$.

(Př. 2) Spočtěte F.T. $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Zřejmě (proč?) $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Řešení: $$\widehat{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, e^{-i2\pi xs}\,dx =$$ výpočet provedeme pomocí residuové věty aplikované na funkci $f(z) = \frac{e^{-i2\pi sz}}{1+z^2}$ s jednoduchými póly v $\pm i$ $=$

$\boxed{s>0}$ 

$-2\pi i \operatorname{Res}_{-i} f(z) = -2\pi i \frac{e^{-2\pi s}}{-2i} = \pi e^{-2\pi s}$

$\boxed{s<0}$ 
$2\pi i \operatorname{Res}_{i} f(z) = 2\pi i \frac{e^{2\pi s}}{2i} = \pi e^{2\pi s}$

$$= \pi e^{-2\pi|s|},$$

kde jsme pro odhad integrálu přes vnější půlkružnici postupovali jako v důkazu JORDANOVA lemmatu, část (6).

Prostor L^1, jak ukazuje příklad 1, není vhodný prostor, na kterém by obecně platila Fourierova inverzní formule (5). Některé zajímavé vlastnosti však Fourierova transformace na prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$ má a stojí za to si je uvést. Ještě předtím však zavedeme ještě jeden pojem: <u>konvoluce</u> dvou funkcí.

$\boxed{\text{Def.}}$ Buď $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Definujme KONVOLUCI FUNKCÍ f A g předpisem

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

Protože evidentně neplatí implikace „$f\in L^1, g\in L^1 \Rightarrow fg \in L^1$" (Najděte protipříklad!), je překvapivé, že pro definici konvoluce stačí (pouze) integrovatelnost f a g, jak ukazuje následující věta.

<u>Věta 16.1</u> (Vlastnosti konvoluce) Platí následující:

- Jsou-li $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $f*g = g*f$ a $f*g \in L^1(\mathbb{R}^d)$
- Jsou-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f*g \in L^p(\mathbb{R}^d)$

Dk. Ověříme „pouze" druhé tvrzení. Platí, pro $p>1$,

$$\|f*g\|^p_{L^p} = \int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy \right|^p dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\, dy \right)^p dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\, |g(y)|}_{G}\; \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}}_{F} dy \Big)^p dx$$

Höldrova nerovnost aplikovaná na $G\in L^p$, $F \in L^{p'}$:

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|^p dy \right) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\, dy \right)^{p/p'}}_{\|f\|^{p-1}_{L^1}} dx$$

$\frac{p}{p'} = \frac{p(p-1)}{p} = p-1$

$$\leq \|f\|^{p-1}_{L^1(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|^p dy\, dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \|f\|^{p-1}_{L^1(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\, dx}_{\|f\|_{L^1}} \Big) |g(y)|^p dy \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$\boxtimes$

Cvičení: Projděte si podrobně důkaz pro $p=1$ a dokažte symetrii konvoluce (substitucí) nejdříve např. pro $d=1$.

$\boxed{\text{Věta 16.2}}$ Vlastnosti Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^d)$

(i) $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$ a $\sup |\hat{f}(x)| =: \|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

(ii) $f, g \in L^1 \Rightarrow \widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$,

(iii) $\lim_{|s| \to \infty} \hat{f}(s) = 0$ pro $f \in L^1$

(iv) $\widehat{\tau_y f}(s) = e^{-i2\pi y \cdot s} \hat{f}(s)$ přičemž $(\tau_y f)(x) = f(x+y)$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$ (shift = posun o y)

(v) $\widehat{f(\alpha x)}(s) = \frac{1}{|\alpha|^d} \hat{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ $|\hat{f}(s)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix \cdot s} dx \right| \underset{|e^{ix \cdot s}|=1}{\leq} \int |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

Přechodem k $\sup_s$ dostáváme druhou část tvrzení $\mathcal{F}: L^1 \to L^\infty$. Skutečnost, že $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^d)) \subset C(\mathbb{R}^d)$ plyne z věty o spojitosti integrálu závislém na parametru.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Dle Věty 16.1 víme, že z $f, g \in L^1$ plyne $f * g \in L^1$ a také $f * g = g * f$. Víme tedy, že $\widehat{f * g} \in C(\mathbb{R}^d)$.

Počítejme

$$\widehat{f*g}(s) = \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x) e^{-i2\pi s \cdot x} dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) e^{-i2\pi s \cdot x} dx dy$$

$$\underset{\substack{x-y=z \\ dx = dz}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(z) g(y) e^{-2\pi i y \cdot s} e^{-2\pi i z \cdot s} dy dz =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) e^{-i2\pi s \cdot z} dz \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-i2\pi s \cdot y} dy \right) = \hat{f}(s) \hat{g}(s).$$

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ BÚNO lze předpokládat, že $f \geq 0$ (jinak $f = f^+ - f^-$), BÚNO $\quad$ —"— $\quad$ že $f = \chi_{[-l,l]}$ (neb pro $f \geq 0$ $\exists h_n \nearrow f$, h_n schodovité a $\underbrace{\text{supp } h_n}$ kompaktní).

Avšak, dle Př. 1,

$$\hat{f}(s) = \widehat{\chi_{[-l,l]}}(s) = \frac{\sin 2\pi s l}{\pi s} \to 0 \text{ pro } s \to \infty.$$

$\boxed{\text{Ad (iv) a (v)}}$ si dokažte sami pomocí věty o substituci.

$\blacksquare$

Dle Příkladu 2 víme, že v prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$ nemůže platit Fourierův inverzní vzorec (5). Zmínili jsme, že hladké funkce s dostatečnou kontrolou chování (poklesu) v ∞ by mohly vést k cíli. Zde se jako první přirozená možnost nabízí prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, reprezentující hladké funkce s kompaktním nosičem, definovaný

$\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d);\ \operatorname{supp}\varphi$ je kompaktní v $\mathbb{R}^d\}$
= {hladké funkce, které jsou vně nějakého d-rozměrného intervalu nulové}

Připomeň: $\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{x\in\mathbb{R}^d;\ \varphi(x)\neq 0\}}$ ← uzávěr

Dle Příkladu 1 však také víme, že Fourierova transformace L^2 resp. L^∞-fce s kompaktním nosičem nemá kompaktní nosič. Tedy opět se F.T. dostáváme mimo prostor funkcí, kde jsme chtěli pracovat.
Motivací k "správné" volbě prostoru nám pomůže i následující příklad.

Příklad 3 Ukažte, že pro $\lambda>0$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{|x|^2}{\lambda}}\right](s) = (\lambda\pi)^{d/2} e^{-\pi^2\lambda|s|^2}$$

neboli

(*) $$\mu>0:\quad \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\mu|x|^2}\right](s) = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{\mu}|s|^2}$$

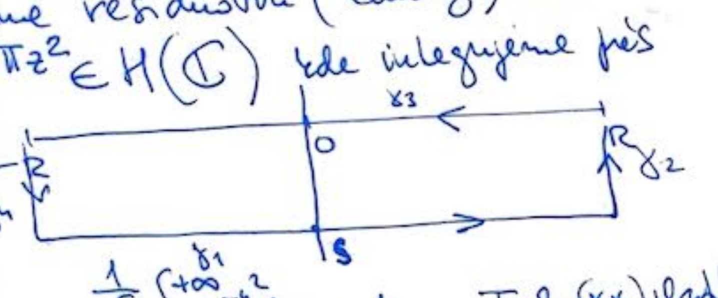
Řešení:
Dokážeme (*) nejdříve pro $\mu=\pi$, tedy (**) $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\pi|x|^2}\right](s) = e^{-\pi|s|^2}$, tedy F.T. i IF.T. nechávají $e^{-\pi|x|^2}$ nezměněnu.

Dk (**)

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\pi x^2}\right](s) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\left(\sum_{j=1}^d (x_j^2 - 2i x_j s_j - s_j^2)\right)} e^{-\pi|s|^2}\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} e^{-\pi|s|^2}\prod_{j=1}^d \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x_j - is_j)^2}\,dx_j$$

Zbývá tedy spočítat $Y := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(y-is)^2}\,dy$

K tomu využijeme residuovou (Cauchy) větu pro $f(z) = e^{-\pi z^2}\in H(\mathbb{C})$ kde integrujeme přes obdélník



Pak

$$0 = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} f(z) \Rightarrow Y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,dt \underset{\sqrt{\pi}t=y}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = 1.$$

Tak (**) platí.

Pro (*) použijeme vzorec pro chování F.T. na škálování:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[f\left(\frac{x}{\beta}\right)\right](s) = \beta^d\,\mathcal{F}^{-1}[f](\beta s)$$

Odsud

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{|x|^2}{\lambda}}\right](s) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\pi\frac{|x|^2}{\lambda\pi}}\right](s) \underset{\beta=\sqrt{\lambda\pi}}{=} (\lambda\pi)^{d/2} e^{-\pi^2\lambda|s|^2}$$

∎

Předchozí příklad říká, že funkce $e^{-\pi|x|^2}$ je invariantní vzhledem k Fourierově transformaci a také, že pro ni platí Fourierův inverzní vzorec. Funkce $e^{-\pi|x|^2}$ nemá kompaktní nosič, ale klesá velmi rychle v ∞.

<u>Definice</u> Řekneme, že $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ je <u>rychle klesající</u> pro $x\to\infty$

$$\equiv \forall m\in\mathbb{N}\quad \exists M_m>0 \text{ tak, že } |f(x)|\le M_m|x|^{-m}$$

Ekvivalentně lze říci, že f je rychle klesající pro $x\to\infty$ právě když $\lim_{x\to\infty} p(x)f(x)=0$ pro libovolný polynom.

<u>Definice</u> (Schwartzův prostor $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

$$\mathcal{S}:=\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^d);\ f \text{ a všechny její derivace jsou rychle klesající}\}.$$

Protože $e^{-\pi|x|^2}\in\mathcal{S}$, ale nemá kompaktní nosič ($\operatorname{supp} e^{-\pi|x|^2}=\mathbb{R}^d$), tak $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\subsetneq\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Nyní si ukážeme, že $\mathcal{S}$ má spoustu zajímavých vlastností, které např. prostor L^1 nemá.

Vlastnosti $\mathcal{S}$

VLASTNOST	MATEMATICKÝ ZÁPIS	L^1 ANO ČI NE?
① $\mathcal{S}$ je vektorový prostor	$f,g\in\mathcal{S},\ \alpha\in\mathbb{C}\Rightarrow \alpha f,\ f+g\in\mathcal{S}$	✓
② $\mathcal{S}$ je algebra	$f,g\in\mathcal{S}\Rightarrow fg\in\mathcal{S}$	×
③ $\mathcal{S}$ je uzavřený na násobení polynomem	$f\in\mathcal{S},\ p\in P\Rightarrow pf\in\mathcal{S}$	×
(4) $\mathcal{S}$ je uzavřený na derivování	$\forall\ \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ multiindex $\alpha_i\in\mathbb{N}_0$ $f\in\mathcal{S}\Rightarrow D^\alpha f:=\frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_d^{\alpha_d}}\in\mathcal{S}$	×
(5) $\mathcal{S}$ je uzavřená na posunutí a násobení $e^{ix\cdot s}$	$f\in\mathcal{S}\Rightarrow \tau_y f\in\mathcal{S},\ e^{ix\cdot s}f\in\mathcal{S}$	✓
(6) $\mathcal{S}$ je podmnožina integrovatelných funkcí	$f\in\mathcal{S}\Rightarrow f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ pro $\forall\ p\in[1,\infty]$	částečně $L^1\not\subset L^p$, $p>1$; $L^p\not\subset L^1$, $p>1$

POZOR! JSEM NA NEOMEZENÉ MNOŽINĚ

Vlastnosti ① - ⑤ si ověřte sami. Ukážeme, že:
$\underline{\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)}$

Buď $f \in \mathcal{S}$, pak $\exists\, M_{d+1} > 0$ tak, že $|f(x)| \leq \frac{M_{d+1}}{|x|^{d+1}}$. & $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus B_R(0)$
$\exists\, R \gg 1$

Tedy
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx \leq \int_{B_R(0)} |f(x)|\,dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} |f(x)|\,dx$$
$$\leq \underbrace{\sup_{x \in \overline{B_R(0)}} |f(x)|\, |B_R(0)|}_{<+\infty} + M_{d+1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} \frac{dx}{|x|^{d+1}}}$$

substit.: zobecněné sférické souř.
$$\tilde{C} \int_R^{\infty} \frac{r^{d-1}}{r^{d+1}}\,dr \leq \frac{\tilde{C}}{R} < +\infty,$$

což jsme chtěli ukázat.

Z poslední vlastnosti plyne, že vše o vlastnostech Fourierovy transformace na L^1 platí i pro Fourierovu transformaci na $\mathcal{S}$. Mimojiné máme
$$\boxed{f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)}$$

Protože $\mathcal{F}^{-1}[F(x)](s) = \mathcal{F}[F(x)](-s)$, tak také platí
$$\mathcal{F}^{-1}(f)\,\mathcal{F}^{-1}(g) = \mathcal{F}^{-1}(f * g)$$

Substitucí $f = \mathcal{F}(f)$ a $g = \mathcal{F}(g)$ dostaneme (za předpokladu, že platí Fourierova inverzní věta)
$$f \cdot g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]).$$

Aplikujeme-li na tuto rovnici Fourierovu transformaci, dostaneme
$$\boxed{\mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]}$$

Tedy, za předpokladu že na $\mathcal{S}$ platí Fourierova inverzní věta (což očekáváme), dostáváme
- Fourierova transformace konvoluce je součin Fourierových transf.
- Fourierova —"— součinu je konvoluce Four. transformací.

Následující tvrzení ilustruje jednu z klíčových vlastností Fourierovy transformace, opět ve dvou tvarech:

- Fourierova transformace derivace je "polynomiální" násobek Fourierovy transformace.
- Fourierova transf. "<u>polynomiálního násobku fce</u>" je <u>derivace</u> Fourierovy transf.

$\boxed{\text{Věta 16.3}}$ (α) $\forall f \in \mathcal{S}$ platí
- $\widehat{D^\alpha f}(s) = (i 2\pi s)^\alpha \hat{f}(s)$
- $\widehat{(-i2\pi x)^\alpha f(x)}(s) = D^\alpha \hat{f}(s)$

(β) $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ a $\mathcal{F}^{-1}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$

Dk $\boxed{\text{Ad } (\alpha)}$ Provedeme pro $\alpha = (0, \dots, \underset{\uparrow \, j\text{-té místo}}{1}, \dots)$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right](s) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-2\pi i x \cdot s} \, dx$$

$$x \cdot s = \underbrace{x_1 s_1 + \dots + x_d s_d}_{\hat{x} \cdot \hat{s}} + x_j s_j \qquad = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-2\pi i x_j s_j} \, dx_j}_{\text{per partes - zde využíváme, že } f \in \mathcal{S}} \Big) e^{-2\pi i \hat{x} \cdot \hat{s}} \, d\hat{x}$$

$$= 2\pi i s_j \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x_j s_j} \, dx_j \Big) e^{-2\pi i \hat{x} \cdot \hat{s}} \, d\hat{x} = 2\pi i \, s_j \, \mathcal{F}[f](s)$$

Dále

$$\mathcal{F}[-2\pi i x_j f(x)](s) = -\int_{\mathbb{R}^d} 2\pi \, i x_j \, f(x) \, e^{-2\pi i x \cdot s} \, dx \qquad = \frac{\partial}{\partial s_j}\left(e^{ix \cdot s}\right)$$

záměna integrálu a derivace $\longrightarrow$ $$= \frac{\partial}{\partial s_j}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot s} \, dx \right) = \frac{\partial}{\partial s_j} \mathcal{F}[f](s)$$

$\boxed{\text{Ad } (\beta)}$ Připomeň $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) ; \sup |x^\beta D^\alpha f(x)| < +\infty$ pro libovolné multiindexy α a $\beta \}$.

- Protože $D^\alpha \hat{f}(s) = \widehat{(-i2\pi x)^\alpha f(x)}(s)$ a $(2\pi i x)^\alpha f(x) \in \mathcal{S}$ a Fourierova transformace funkcí z $\mathcal{S}$ je konečná, tak $D^\alpha \hat{f}(s) < \infty$ pro $\forall \alpha$ a navíc je spojitá dle vět o spojitosti integrálu závislém na parametru. Tj. $\forall \alpha$ $D^\alpha \hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$.
- Chceme ukázat, že $\forall$ polynom p a $\forall \alpha$: $\sup_s |p(s) D^\alpha \hat{f}(s)| < \infty$. Stačí $\sup_s |s^\beta \hat{f}(s)| < \infty$. Dle části $(\alpha)_1$ však tvrzení plyne ze skutečnosti, že $D^\beta f \in \mathcal{S}$. ∎

Shrňme si základní vlastnosti Fourierovy transformace do následující tabulky

Funkce f (x)	Fourierova transformace $\hat{f}$ (s)
$f(x)$	$\hat{f}(s)$
$\tau_y f(x) := f(x+y)$	$e^{-2\pi i y \cdot s}\, \hat{f}(s)$
$e^{-2\pi i x \cdot y} \cdot f(x)$	$\hat{f}(s+y) = \tau_y \hat{f}(s)$
$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$	$2\pi i s_k \hat{f}(s)$
$-2\pi i x_k f(x)$	$\frac{\partial}{\partial s_k}(\hat{f}(s))$
$p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) f(x)$	$p(2\pi i s_k)\, \hat{f}(s)$
$p(2\pi i x) \cdot f(x)$	$p\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \hat{f}(s)$
$(f * g)(x)$	$\hat{f}(s)\, \hat{g}(s)$
$f(x)\, g(x)$	$(\hat{f} * \hat{g})(s)$

Šipky indikují jistou symetrii operací a Fourierovy transformace.

$$\boxed{\hat{f}(s) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot s}\, dx}$$

$x = (x_1, \dots, x_d)$
$s = (s_1, \dots, s_d)$
$dx = (dx_1, \dots, dx_d)$

$$p(y) := a_0 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1d} y_d + a_{211} y_1^2 + a_{212} y_1 y_2 + \dots$$

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\right) := a_0 + a_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_{1d} \frac{\partial}{\partial x_d} + a_{211} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a_{212} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots$$