M. BULÍČEK & J. MÁLEK : MATEMATICKÁ ANALÝZA 1
NOFY151 , ZS 2019/20

Zahájení : přivítání
obecné informace
sylabus
nutné požadavky ke zkoušce

1. LIMITA, SPOJITOST, DERIVACE

1.1 ZÁKLADNÍ POJMY

▶ MATEMATIKA, JEJÍ ROLE VE VĚDĚ, JEJÍ STRUKTURA

__Věda__ jako celek představuje systematický, racionální a empirický způsob poznávání objektů a procesů reálného světa. Věda se dělí (nejednoznačným a navzájem se stále více překrývajícím způsobem) na vědy

- přírodní (fyzika, biologie, chemie, ...)
- technické (inženýrství – aplikované vědy přírodní ...)
- lékařské či obecněji vědy o živé přírodě
- společenské (ekonomie, lingvistika, teologie, ... psychologie, ...

Vědní obory shrnují poznatky a usilují o porozumění souvislostí, vztahů, procesů, případně predikci či co nejlepší posouzení dané situace. Procesy, vztahy, souvislosti jsou popisovány verbálně a následně, je-li snaha dosáhnout přesnějšího popisu, popisovány univerzálnějším jazykem – matematikou, která __intuitivní__ mění v __konzistentní__.

$\boxed{\text{Matematika je jazykem (přírodních) věd}}$

Filosofie či počítačová věda jsou další vědní disciplíny s přesahem přes vědu jako celek.

Znám-li dobře češtinu, slovenštinu, angličtinu, ruštinu, či jakýkoliv jiný jazyk, což zahrnuje pravopis, gramatiku, výslovnost, slovní zásobu, literaturu, ... mohu velmi dobře (verbálně či písemně) popisovat procesy (= život) kolem sebe.

Zcela podobně, čím lépe známe matematiku, tím lépe (přesněji) dokážeme popsat pozorované jevy, zpracovávat / interpretovat experimenty, hledat souvislosti a odhalovat věci jinak takřka neodhalitelné, zkrátka lépe rozumět dané "fyzikální" teorii.

MATEMATIKA (podobně jako jiný dorozumívací jazyk) má mnoho oblastí:

LOGIKA, ALGEBRA, GEOMETRIE, TEORIE MNOŽIN, MATEMATICKÁ ANALÝZA, ..., TOPOLOGIE, které se často dále dělí.

Ačkoliv předmětem našeho kurzu je matematická analýza (což je, zhruba řečeno, studium nekonečných procesů, kde klíčovým pojmem je funkce), dnes se analýze věnovat nebudeme. Potřebujeme se nejdříve domluvit na základech matematické gramatiky (tj. logice) a zavést číselné množiny (spojené se základy algebry, teorie množin, teorie čísel).

▶ ZÁKLADY LOGIKY

angl. sentence

Věty v běžné řeči nazýváme vyjádření (anglicky statements).
VÝROKEM rozumíme vyjádření, o kterém lze jednoznačně rozhodnout, zda je pravdivé či nepravdivé.
Výrokům, které jsou pravdivé, přiřadíme hodnotu 1 (true T)
Výrokům, které jsou nepravdivé, přiřadíme hodnotu 0 (false F)

Výroky tak splňují dvě pravidla:
(i) dichotomie, které říká, že každý výrok musí mít hodnotu buď 0 nebo 1.
(ii) vyloučeného středu, které říká, že vyjádření, kterému nelze přiřadit jednoznačně hodnotu 0 nebo 1, není výrok.

VÝROKOVÝ POČET (tj. počítání s výroky) je založen na následujících operacích s výroky popsaných v Tabulce 1.:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabulka 1. Popis operací negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence.

Matematická tvrzení (výroky), zpravidla nazývané Věty (angl. Theorems), Lemmy, ...) jsou často ve tvaru implikace $\Rightarrow$ či ekvivalence $\Leftrightarrow$. Protože pravdivostní tabulka $A \Leftrightarrow B$ je stejná jako pravdivostní tabulka $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, tak se častá matematická tvrzení redukují na implikace $\Rightarrow$.

Protože (viz Tabulka 2) jsou výroky

- $A \Rightarrow B$
- $\neg B \Rightarrow \neg A$
- $\neg(A \wedge \neg B)$

z pohledu logiky stejné, neboť mají stejnou pravdivostní tabulku, tak rozlišujeme tři způsoby důkazu implikací:

PŘÍMÝ $A \Rightarrow B$
NEPŘÍMÝ $\neg B \Rightarrow \neg A$
SPOREM $\neg(A \wedge \neg B)$

které ilustrujeme na následujícím příkladě.

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1

Tabulka 2 Pravdivostní tabulky výroků $A \Rightarrow B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$ a $\neg(A \wedge \neg B)$ jsou stejné.

Příklad Buď $n = 1, 2, 3, \ldots$ neboli $n \in \mathbb{N}$ (množina přirozených čísel). Dokážeme trojím způsobem, že platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ výrok: Je-li n^2 liché, pak n je liché.

Buď $n \in \mathbb{N}$ libovolné, ale pevné.

PŘÍMÝ DŮKAZ Protože n lze rozložit na součin prvočísel, máme $n = p_1 \cdots p_r$ a $n^2 = p_1^2 \cdots p_r^2$. Protože n^2 je liché, tak každé p_i^2, $i = 1, \ldots, r$, je liché. Odsud a ze skutečnosti, že p_i je prvočíslo plyne, že p_i je liché. Pak však n = součin lichých čísel je liché. $\blacksquare$

NEPŘÍMÝ DŮKAZ Dokazujeme implikaci

Není-li n liché (tj. n je sudé), pak není n^2 liché (tj. n^2 je sudé)

Dk Je-li n sudé, pak $n = 2k$ a pak $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ tedy n^2 je sudé. $\blacksquare$

Důkaz SPOREM Předpokládáme, že n^2 je liché a zároveň n je sudé a chceme nalézt nepravdivý výrok, neboli spor (značíme ↯) s předpoklady. Je-li však n^2 liché a n sudé, pak n^2+n je liché a zároveň $n^2+n = n(n+1)$ je číslo sudé neboť jedno z čísel n resp. $n+1$ musí být sudé. Tedy n^2+n má být liché i sudé, což je hledaný spor. ↯ ■

Výše uvedený příklad je zajímavý ještě ze dvou důvodů.

ZAPRVÉ Výrok „je-li n^2 liché, pak je n liché" závisí na parametru $n \in \mathbb{N}$. Lze jej tedy označit $V(n)$. Tvrzení, které jsme dokázali třemi způsoby, říká, že $V(n)$ má platit pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což zapisujeme: $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\, V(n)}$

Symbol $\forall$ čteme "pro všechna" se nazývá obecný kvantifikátor

Negace výroku

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$ tzn. $(\forall n \in \mathbb{N})\, V(n)$

zní

Existuje $n \in \mathbb{N}$ neplatí $V(n)$.

Tento výrok zapíšeme

$(\exists n \in \mathbb{N})\, \neg V(n)$

Symbol $\exists$ čteme "existuje" se nazývá existenční kvantifikátor. Chceme-li zapsat "existuje právě jeden" píšeme $\exists!$. Někdy lze také vidět symbol $\exists_1$, který značí totéž.

ZADRUHÉ Výrok (nebo výroková forma = výrok s kvantifikátory) $(\forall n \in \mathbb{N})\, V(n)$ kde $V(n)$ je např. "je-li n^2 liché, pak n liché" je parametrizován množinou přirozených čísel, což je nejmenší induktivní množina v množině reálných čísel (viz později) a takové tvrzení lze dokazovat principem indukce: (α) ověříme, že $V(n_0)$ platí pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ (typicky $n_0 = 1$)

(β) ověříme, že platí implikace: Pokud $V(n)$ platí pro $\forall n \le n_0$, pak $V(n_0+1)$.

Pro ilustraci dokažme naše jednoduché tvrzení z Příkladu metodou indukce.

Ad (α) $V(1)$ tj. "je-li 1^2 liché, pak 1 liché" platí ✓

$\boxed{\text{Ad } (\beta)}$ Předpokládejme, že $V(n)$ platí $\forall n \le n_0$. Chceme dokázat $V(n_0+1)$ tj. "je-li $(n_0+1)^2$ liché, pak n_0+1 je liché"

Avšak: $\underbrace{(n_0+1)^2}_{\text{liché}} = n_0^2 + 2n_0 + 1 = (n_0-1)^2 + \underbrace{4n}_{\text{sudé}} \Rightarrow (n_0-1)^2$ je liché

($2n_0$ sudé, 1 liché; $\Rightarrow$ n_0^2 sudé)

Pro n_0^2 nelze indukční předpoklad použít

pak z indukčního předpokladu n_0-1 je liché, a tedy n_0+1 je rovněž liché.

Můžeme (a budeme) mít výroky (výrokové formy), které závisí na více proměnných. Uvažujme pro jednoduchost situaci, kdy výrok závisí na dvou parametrech $x \in X$ a $y \in Y$, tj. $V(x,y)$. Pak jsou možné tyto kombinace kvantifikátorových forem:

1a $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)\ V(x,y)$ 1b $(\forall y \in Y)(\forall x \in X)\ V(x,y)$

2a $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ V(x,y)$ 2b $(\exists y \in Y)(\forall x \in X)\ V(x,y)$

3a $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)\ V(x,y)$ 3b $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ V(x,y)$

4a $(\exists x \in X)(\exists y \in Y)\ V(x,y)$ 4b $(\exists y \in Y)(\exists x \in X)\ V(x,y)$

Výroky Na a Nb se liší pořadím kvantifikátorů. U výroků se stejnými kvantifikátory na pořadí nezáleží, neboť je můžeme zapsat $(\forall (x,y) \in X \times Y)\ V(x,y)$ resp. $(\exists (x,y) \in X \times Y)\ V(x,y)$

Tedy 1a a 1b jsou ekvivalentní a podobně 4a a 4b.

NAOPAK, 2a a 2b a podobně 3a a 3b ekvivalentní NEJSOU, a pořadí kvantifikátorů je extrémně důležité jak podtrhuje následující příklad.

Příklad M množina mužů, $Ž$ množina žen, $V(m,ž)$ označuje výrok "$ž$ je matkou m". Pak

$(\forall m \in M)(\exists ž \in Ž)\ V(m,ž)$ je pravdivý výrok

zatímco

$(\exists ž \in Ž)(\forall m \in M)\ V(m,ž)$ je výrok nepravdivý.

Cvičení: Napište si negace obou výroků a rozhodněte kdo jsou pravdivé.

AXIOMATICKÉ ZAVEDENÍ ČÍSEL

Množina je soubor objektů. Pokud objekt x patří do množiny M, píšeme $x \in M$. Jestliže x nepatří do M, pak píšeme $x \notin M$. Množina M je neprázdná, píšeme $M \neq \emptyset$, pokud obsahuje aspoň jeden prvek. Symbol $\emptyset$ značí prázdnou množinu.

[Axiomatické zavedení reálných čísel] Předpokládáme (definitoricky), že existuje neprázdná množina $\mathbb{R}$, na které existují dvě operace $+, \cdot$ a relace uspořádání $<$ tak, že platí axiomy (A1) – (A4) (o sčítání)
(M1) – (M4) (o násobení)
D (spojující násobení a sčítání)
(O1) – (O4) (o uspořádání)
(Arch) (Archimedův axiom úplnosti)

Takovouto strukturu $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ budeme nazývat **množinou reálných čísel**, značíme $\mathbb{R}$.

Axiomy budeme zavádět postupně. Jejich postupné zavedení nám umožní odlišit a zavést jiné číselné množiny.

Nejdříve zavedeme axiomy pro sčítání a násobení. Předpokládáme, že na $\mathbb{R}$ jsou dvě operace $+$ a $\cdot$ tak, že ($+: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\cdot: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) platí:

(A1) $(\forall x,y,z \in \mathbb{R}): (x+y)+z = x+(y+z)$ ASOCIATIVITA

(A2) $(\forall x,y \in \mathbb{R}): x+y = y+x$ KOMUTATIVITA

(A3) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ (prvek) $x+0 = 0+x = x$ EXISTENCE NEUTRÁLNÍHO PRVKU

(A4) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists$ prvek $-x)$ $x+(-x)=0$ EXISTENCE INVERZNÍHO (OPAČNÉHO) PRVKU

Poznámka pod čarou: Axiomy (A1) – (A4) říkají, že $(\mathbb{R}, +)$ je Abelova (neboli komutativní) grupa.

(M1) $(\forall x,y,z \in \mathbb{R})$ $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot (y\cdot z)$ ASOCIATIVITA

(M2) $(\forall x,y \in \mathbb{R})$ $x\cdot y = y\cdot x$ KOMUTATIVITA

(M3) $\exists$ prvek, označíme $1\in\mathbb{R}$, tak, že $\boxed{1\neq 0}$ a $\boxed{x\cdot 1 = 1\cdot x = x \quad \forall x}$ EXISTENCE NEUTRÁLNÍHO PRVKU

(M4) $(\forall x\in\mathbb{R}, x \neq 0)$ ($\exists$ prvek označme jej x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$) $x\cdot x^{-1}=1$ EXISTENCE INVERZNÍHO PRVKU

Obě operace spojuje distributivní axiom:

(D) $(\forall x,y,z\in\mathbb{R})$ $(x+y)\cdot z = x\cdot y + y\cdot z$ DISTRIBUTIVITA

<u>Definice</u> (z algebry) Množina, jejíž objekty splňují $\boxed{\text{(A1)-(A4) a (M1)-(M4) a také (D)}}$ se nazývá <u>těleso</u> (angl. field)

Z definice axiomů plyne, že těleso musí obsahovat alespoň dva různé prvky: $0\neq 1$ (neutrální prvky vzhledem k sčítání a násobení).

<u>Příklad 1</u> (tělesa, které má právě dva prvky 0,1). Buď $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$, kde operace $+$ a $\bullet$ jsou dány tabulkami:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\bullet$	0	1
0	0	0
1	0	1

Na příkladu vidíme, že

- axiomy tělesa ani nezaručují, že $1+1\neq 0$
- ani přirozená čísla nemusí být podmnožinou číselného tělesa.

<u>Příklad 2</u> Definujme $\mathbb{C} \overset{df.}{=} \{z=(z_1,z_2);\ z_1,z_2\in\mathbb{R}\}$ a zavedme na $\mathbb{C}$ operace $\oplus$ a $*$ takto: $\forall\, z,u\in\mathbb{C}$

$$z\oplus u \overset{df.}{=} (z_1+u_1,\ z_2+u_2)$$
$$z * u = (z_1,z_2)*(u_1,u_2) \overset{df.}{=} (z_1u_1-z_2u_2,\ z_1u_2+z_2u_1)$$

<u>Cvičení</u> (DÚ) Ukažte, že $(\mathbb{C},\oplus,*)$ je těleso.

Terminologie: Je-li $z=(z_1,z_2)$, pak z_1 .... reálná část z, z_2 .... imaginární část z. Je-li $x\in\mathbb{R}$, pak ztotožňujeme $x=(x,0)$ a tak reálnou osu s $\mathbb{R}$ a chápeme $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Speciálně: $0=(0,0)$ a $1=(1,0)$. Definujme $\boxed{i=(0,1)}$ IMAGINÁRNÍ JEDNOTKA

Tvrzení $(\forall z\in\mathbb{C})$ $z=(z_1,z_2)$ lze psát ve tvaru $z=z_1+iz_2$.

Dk
$$\left.\begin{array}{l} z_1=(z_1,0) \\ iz_2=(0,1)*(z_2,0)=(0,z_2) \end{array}\right\} \Rightarrow z_1+iz_2=(z_1,0)+(0,z_2)=(z_1,z_2) \quad \blacksquare$$

Tvrzení $i^2=-1$

Dk $i^2=i*i=(0,1)*(0,1)=(-1,0)=-1$. $\blacksquare$

Nyní přidáme k $\mathbb{R}$ další 4 axiomy: předpokládáme existenci binární relace $>$, která dává uspořádání reálných čísel a splňuje:

(O 1) Nastává právě jedna z relací pro $\forall x\in\mathbb{R}$: $x>0$, $x=0$ nebo $-x>0$.
(píšeme: $x>y \overset{df.}{=} x-y>0$, $x=y \overset{df.}{=} x-y=0$, ..)

(O 2) Je-li $x>y$, pak pro každé $z\in\mathbb{R}$: $x+z>y+z$
(odsud nutně $1+1\neq 0$) $\boxed{\text{Úmluva } 1>0}$

(O 3) Je-li $x>0$ a $y>0$, pak $xy>0$

(O 4) Je-li $x>y$ a $y>z$, pak $x>z$.

Zavedeme označení:
$\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R};\ x>0\}$ kladná čísla
$\mathbb{R}^-=\{x\in\mathbb{R};\ -x>0\}$ záporná čísla
$x\le y \overset{df.}{=} y>x$ nebo $y=x$

Cvičení Z axiomů plyne:
Je-li $x<y$ a $z>0$, pak $xz<yz$
Je-li $x<y$ a $z<0$, pak $xz>yz$.

Tvrzení 1 (důležité) Buďte $a,b\in\mathbb{R}$ splňující $(\forall\varepsilon>0)(a\le b+\varepsilon)$. Pak $a\le b$.

Dk Sporem: Nechť $(a\le b+\varepsilon$ pro $\forall\varepsilon>0)\wedge b<a$. Uvaž $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$.
Pak $b+\varepsilon=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}<\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$. Tedy a podle předchozího $b+\varepsilon<a$ což je spor s předpokladem.

Def. Řekneme, že podmnožina $P\subset\mathbb{R}$ je induktivní množina pokud platí:
- $1\in P$
- $x\in P \Rightarrow x+1\in P$

Příklady: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ jsou induktivní množiny

Def. (Přirozená čísla $\mathbb{N}$) Nejmenší induktivní množina v $\mathbb{R}$, ozn. $\mathbb{N}$.

Tvr. $\mathbb{N} = \{1, \underbrace{1+1}_{2}, \underbrace{2+1}_{3}, \dots\}$

Def.
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{\pm k;\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
  celá čísla (integers)
- $\mathbb{Q} = \{x;\ x = \frac{p}{q}$ kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}\}$

Cvičení
- $\mathbb{Q}$ splňuje všechny axiomy (A1)-(A4), (M1)-(M4), D a (O1)-(O4).
- Jsou-li $a, b \in \mathbb{Q}$, pak $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$. Navíc $\frac{a+b}{2}$ leží mezi a a b. Odsud plyne:
  Je-li dáno racionální číslo, pak nelze mluvit o nejbližším větším racionálním čísle.

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ iracionální čísla

Tvrzení 2 Je-li $m \in \mathbb{N}$ takové, že m nelze zapsat ve tvaru $m = k^2$, pak $\sqrt{m}$ je iracionální.

Dk vynecháme. Pro $m = 2$ se důkaz dělá na SŠ. Důkaz si najdete ve zdrojích/literatuře. $\blacksquare$

- Čísla $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$, ale i π, e^{π}, e jsou iracionální.
- Ukážeme si později, že množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ obsahuje "řádově více prvků" než množina $\mathbb{Q}$.
- Iracionální čísla vznikla přirozeně při hledání řešení rovnice $x^2 = 2$.

Uspořádání $<$, $\leq$ nám umožňují zavést pojem intervalu.

Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$(a, b) =^{df} \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$ OTEVŘENÝ INTERVAL

$\langle a, b \rangle =^{df} \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$ UZAVŘENÝ INTERVAL (někdy $[a, b] := \langle a, b \rangle$)

$(a, b\rangle =^{df} \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$

$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$

(polouzavřené intervaly)

Zavádíme také symboly $+\infty$ a $-\infty$ (nepatří do $\mathbb{R}$):

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$ a podobně $\langle a, +\infty)$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$ a podobně $(-\infty, a\rangle$

Někdy: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ a $\{a\}$ je degenerovaný uzavřený interval (bod a).

<u>Geometrická interpretace $\mathbb{R}$</u> $\mathbb{R}$ ztotožníme s přímkou, na které zvolíme dva různé body 0 a 1. Zpravidla $0<1$. Tím zvolíme (definujeme) měřítko a orientaci. Uspořádání $x<y$ má pak jednoduchou interpretaci: y je napravo od x.

Budujeme axiomatickou teorii reálných čísel. Zbývá nám zformulovat <u>axiom úplnosti</u>, který by měl oddělit reálná čísla od racionálních. K formulaci axiomu úplnosti budeme potřebovat pojmy: horní/dolní závora (nebo mez) a supremum/infimum

<u>Def.</u> • Buď S podmnožina $\mathbb{R}$. Je-li $b\in\mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x\in S$ platí $x\leq b$, pak b je <u>horní závora S</u> a řekneme, že S je <u>omezená shora</u>

• Podobně: dolní závora S, omezenost zdola.

• Množina S je <u>omezená</u> $\overset{df}{\equiv}$ (S je omezená shora) $\wedge$ (S je omezená zdola).

<u>Cvičení</u> • Je-li b horní závora, pak každé číslo větší než b je také horní závora.

• Je-li b <u>horní závora S</u> a $b\in S$, pak b je <u>maximum S</u> (nebo maximální prvek S) $b=\max\{x;\ x\in S\}=\max\limits_{x\in S}\{x\}$

<u>Def.</u> Množina S je neomezená shora, nemá-li horní závoru.

<u>Příklady</u> (i) $\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$ je neomezená shora, je však omezená zdola, 0 je dolní závora (a také jakékoliv číslo menší než nula je dolní závora). 0 však není minimem $\mathbb{R}^+$, neboť $0\notin\mathbb{R}^+$.

(ii) $S=\langle 0,1\rangle$ je omezená shora i omezená zdola, je tedy omezená, dolní závora $0\in S$, horní závora $1\in S$. tedy $0=\min S$ a $1=\max S$.

(iii) $S=(0,1)$ 1 je nejmenší horní závora, $1\notin S$

(iv) $S=\{\frac{1}{m},\ m\in\mathbb{N}\}$ je omezená, $1\in S$ je horní závora. $0\notin S$ je největší dolní závora.

Def. Číslo $b \in \mathbb{R}$ je supremum S pokud b je nejmenší horní závora S, tzn., (i) b je horní závora S

(ii) žádné číslo menší než b není horní závora S.

Píšeme $\boxed{b = \sup S}$ Je-li $b \in S$, pak $\sup S = \max S$.

Číslo $b \in \mathbb{R}$ je infimum S, pokud b je největší dolní závora S.

Píšeme $\boxed{b = \inf S.}$ Je-li $b \in S$, pak $\inf S = \min S$.

Axiom ÚPLNOSTI Každá neprázdná shora omezená podmnožina $S \subset \mathbb{R}$ má supremum.

Důsledek Každá neprázdná zdola omezená množina $S \subset \mathbb{R}$ má infimum.

Dk K S sestrojme množinu $-S \stackrel{df}{=} \{x \in \mathbb{R};\ -x \in S\}$. Pak $-S$ je omezená shora. Má supremum b. Položme $a := -b$. Pak a je infimum S, neb vlastnosti plynou z vlastností suprema b.

Tvrzení 3 (Aproximační vlastnost) Buď $S \neq \emptyset$, $S \subseteq \mathbb{R}$, $b := \sup S$. Pak pro $(\forall a < b)(\exists x \in S)$ $\quad a < x \leq b$.

Dk Z definice suprema plyne $x \leq b$ pro $\forall x \in S$. Když $(\exists a < b)(\forall x \in S)$ $x \leq a$, pak b není supremum S (nejmenší horní závora), neboť a by byla horní závora a $a < b$, což je spor.

Tvrzení 4 (Aditivní vlastnost suprema) Buď $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $a = \sup A$, $b = \sup B$. Definujme $C \stackrel{df}{=} \{x + y;\ x \in A, y \in B\}$. Potom $\boxed{\sup C = a + b \ (= \sup A + \sup B)}$

Dk Rovnost dokážeme tak, že platí $\boxed{\sup C \leq a + b}$ a rovněž $\boxed{a + b \leq \sup C + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0}$, což s pomocí Tvrzení 1 dá důkaz Tvrzení 4.

$\boxed{\leq}$ pro $(\forall x \in A)(\forall y \in B)$ $\quad x + y \leq a + b$. Tedy $a + b$ je horní závora C a $\sup C \leq a + b$.

$\boxed{\geq}$ Buď ε libovolné, ale pevné. Z Tvrzení 3 plyne existence $x_0 \in A$ a $y_0 \in B$: $\quad \begin{cases} a - \varepsilon < x_0 \leq a \\ b - \varepsilon < y_0 \leq b \end{cases}$

Sečteme: $\quad a + b - 2\varepsilon < x_0 + y_0 \leq \sup C$

Tedy $a + b \leq \sup C + 2\varepsilon$ a dle Tvrz. 1: $a + b \leq \sup C$. ∎

Tvrzení 5 $\mathbb{N}$ není omezené shora

Dk Sporem. Předpokládejme, že $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ je omezené shora. Pak z axiomu úplnosti plyne, že existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že $\sup \mathbb{N} = a$. Protože $\mathbb{N}$ je induktivní, dle Tvrzení 3 ke $a-1$ musí existovat $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a-1 < m_0 \le a$. Pak však $m_0 + 1 \in \mathbb{N}$ a zároveň $a < m_0+1$. Tedy a nemůže být horní mez, a máme spor ↯. ∎

Tvrzení 6 Buď $x \in \mathbb{R}$ libovolné. Pak $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tak, že $x < m$.

Dk Kdyby takové m neexistovalo, pak x omezuje $\mathbb{N}$. Ale dle Tvrzení 5, $\mathbb{N}$ není shora omezené.

Tvrzení 7 (Archimédův princip) Buď $y \in \mathbb{R}$ libovolné a $\varepsilon > 0$ také libovolné ("velmi malé"). Pak existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$m\varepsilon > y$$

Dk Použij Tvrzení 6 na $x = \frac{y}{\varepsilon}$.

Tvrzení 8 (Hustota racionálních čísel v $\mathbb{R}$) Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, existuje $r \in \mathbb{Q}$ tak, že $x < r < y$.

[Neboli: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists r \in \mathbb{Q})\quad x < r < x + \varepsilon$]

Dk Protože $y - x > 0$ tak $\frac{1}{y-x} > 0$ a dle Tvrzení 6 existuje $M \in \mathbb{N}$ tak, že $\boxed{M > \frac{1}{y-x} \quad (\bullet)}$ k číslům $Mx, -Mx \in \mathbb{R}$ existují, opět dle Tvrzení 6, čísla $m, m' \in \mathbb{N}$ tak, že

$$Mx < m \quad \text{a} \quad -Mx < m'$$

Odtud

$$-\frac{m'}{M} < x < \frac{m}{M}.$$

Existuje $m'' \in \mathbb{N}$ nejmenší takové, že $x < \frac{m''}{M}$. Pak hledané $r = \frac{m''}{M}$ neboť

$$x < \frac{m''}{M} = \frac{m''-1}{M} + \frac{1}{M} \le x + \frac{1}{M} \overset{(\bullet)}{<} x + y - x = y$$ ∎

Tvrzení 9 Existuje číslo $M \in \mathbb{R}$ tak, že $M^2 = 2$ (toto číslo pak označme $\sqrt{2}$ nebo $2^{1/2}$)

Dk Uvažujme $S = \{x;\ (0 < x) \wedge (x^2 < 2)\}$. S je omezené shora (např. $x \in S \Rightarrow x < 2$); tedy 2 je horní závora pro S). Z axiomu úplnosti plyne existence $\sup S$, označme jej M.

Mohou, dle axiomu (O1) nastat tři případy: buď $M^2=2$ nebo $M^2>2$ nebo $M^2<2$. Ukážeme, že $\boxed{M^2<2}$ i $[M^2>2]$ vedou ke sporu s definicí suprema.

Nechť $M^2<2$. Uvažujme $M'=M+\frac{1}{n}$. Pak

$$(M')^2 = M^2 + \frac{2M}{n} + \frac{1}{n^2} < M^2 + \frac{2M}{n} + \frac{1}{n} = M^2 + \frac{2M+1}{n}$$

Vidíme, že $(M')^2<2$ pokud $M^2+\frac{2M+1}{n}<2$ tj. pokud $n>\frac{2M+1}{2-M^2}$. Dle Tvrzení 6 však takové n existuje. Pak však $M'>M$ a $(M')^2<2$ a máme $\lightning$ s tím, že M je supremem S, přesněji M není horní závora S.

Nechť $M^2>2$. Pak uvažme $M''=M-\frac{1}{n}$. Opět

$$(M'')^2 = M^2 - \frac{2M}{n} + \frac{1}{n^2} > M^2 - \frac{2M}{n}$$ a vidíme, že

$(M'')^2>2$ pokud najdeme n tak, že $M^2-\frac{2M}{n}>2$ tzn. pokud $n>\frac{2M}{M^2-2}$. Takové n však dle Tvrzení 6 existuje. Pak však $(M'')^2>2$ a $M''<M$, což dává spor se skutečností, že M je <u>nejmenší</u> horní závora. ▨

Tedy nutně $M^2=2$.

Tvrzení 10 $\mathbb{Q}$ nesplňuje axiom úplnosti.

(Dk) Sporem: Nechť $\mathbb{Q}$ splňuje axiom úplnosti. Pak $T=\{x\in\mathbb{Q}; x^2<2\}$ má v $\mathbb{Q}$ supremum: $\exists r\in\mathbb{Q}$ tak, že $\sup T = r$.

Dle (O1) mohou nastat tři možnosti: $r=\sqrt{2}$, $r>\sqrt{2}$, $r<\sqrt{2}$.

- Když $r=\sqrt{2}$, pak spor s Tvrzením 2: $\sqrt{2}$ je iracionální.
- když $r>\sqrt{2}$, pak dle Tvrzení 8 existuje $r'\in\mathbb{Q}$: $\sqrt{2}<r'<r$. Pak však r není supremum.
- když $r<\sqrt{2}$, pak opět dle Tvrzení 8 existuje $r''\in\mathbb{Q}$: $r<r''<\sqrt{2}$, což vede opět ke sporu s definicí suprema. ▨

Důležité pozorování $(\mathbb{C},\oplus,\circledast)$ je těleso. Nelze však na $\mathbb{C}$ zavést uspořádání splňující (O1)-(O4). Kdyby to bylo možné, pak $\boxed{\text{buď } i>0}$ $\boxed{\text{nebo } i<0}$. Když $i>0$, pak (O3) $i*i > i*0 \iff -1>0$ což po přičtení 1 dává $\boxed{0>1}$. Protože $-1>0$ tak $(-1)\cdot(-1)>(-1)\cdot 0$ implikuje $\boxed{1>0}$ a spor plyne z toho, že $0>1$ a $1>0$. Podobně pro $i<0$.

ZÁKLADY TEORIE MNOŽIN, POJEM FUNKCE A JEJÍ VLASTNOSTI

Axiomatická teorie množin je abstraktní netriviální matematická disciplína. My se omezíme na intuitivní porozumění <u>množiny</u> coby <u>soubor objektů</u>, který bude zadán:
- výčtem (např. $M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$)
- vlastností prvků ($M = \{k \in \mathbb{N};\ k \text{ liché} \wedge k < 12\}$)

Budeme se vyhýbat definicím, které jsou blízké Russellově paradoxu*).

Zavedeme toto značení:
- $\boxed{A \subset B} \stackrel{df}{=} x \in A \Rightarrow x \in B$ (NEBO $(\forall x \in A)\ x \in B$)
- $\boxed{A = B} \stackrel{df}{=} A \subset B \wedge B \subset A$
- $\boxed{A \cap B} \stackrel{df}{=} \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$
- $\boxed{A \cup B} \stackrel{df}{=} \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$
- $\boxed{A \setminus B} \stackrel{df}{=} \{x;\ x \in A \wedge x \notin B\}$
- $\boxed{A \subsetneqq B} \stackrel{df}{=} A \subset B \wedge \neg(A = B)$

Je-li P_α soubor množin indexovaný množinou A, tzn. $\alpha \in A$, pak

$$\boxed{\bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha} \stackrel{df.}{=} \{x;\ (\exists \alpha_0 \in A)\ x \in P_{\alpha_0}\}$$

a

$$\boxed{\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha} \stackrel{df.}{=} \{x;\ (\forall \alpha_0 \in A)\ x \in P_{\alpha_0}\}$$

Platí: Pro A, B, C:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

Obecněji pro C, $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$:

$$\left[\begin{array}{l} C \setminus \bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (C \setminus P_\alpha) \\ C \setminus \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (C \setminus P_\alpha) \end{array}\right]$$

De Morganovy vzorce.

Dokažte sami nebo na cvičení.

---

*) Russellův paradox: Buď Y = {soubor množin, které neobsahují sebe jako prvek}

Otázka (Russellův paradox): patří nebo nepatří Y do Y?
Když $Y \in Y$, pak by tam dle definice Y nemělo patřit.
Když $Y \notin Y$, pak by tam dle definice Y měla patřit.
Ejhle, paradox!

Def. Kartézský součin neprázdných množin A a B, značený $A\times B$, definujeme jako množinu uspořádaných dvojic (a,b), kde $a\in A, b\in B$:
$A\times B \overset{df.}{=} \{(a,b);\ a\in A \wedge b\in B\}$. Pokud $A=B$, pak $A\times A =: A^2$

Podobně: $M_1\times\ldots\times M_k \overset{df.}{=} \{(z_1,\ldots,z_k);\ z_i\in M_i \text{ pro } i=1,\ldots,k\}$.

Jsou-li $M_1=M_2=\ldots=M_k$, pak $M^k = \underbrace{M\times\ldots\times M}_{k\text{-krát}}$.

(angl. Mapping from A to B)

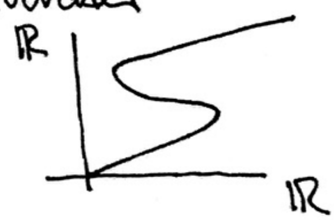
Def. Zobrazení ϕ z (množiny) A do (množiny) B $\overset{df.}{=}$ předpis, který každému $a\in A$ přiřadí nejvýš jedno $b\in B$.

Složitěji: $\phi\subset A\times B$ je zobrazení pokud platí:

$$\forall\ (a_1,b_1),(a_2,b_2)\in\phi:\ a_1=a_2 \Rightarrow b_1=b_2$$
$$\Updownarrow \qquad \text{—〃—} \qquad :\ b_1\neq b_2 \Rightarrow a_1\neq a_2$$

Př. a) $\phi = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R};\ x^2+y^2=1\}$ není zobrazení

b) ϕ dané křivkou v obr. 1 není zobrazení



Def. Buď ϕ zobrazení z A do B.

$D_\phi := \{x\in A;\ (\exists y\in B)\ (x,y)\in\phi\}$ definiční obor (domain)

$R_\phi := \{y\in B;\ (\exists x\in A)\ (x,y)\in\phi\}$ obor hodnot (codomain)

Místo $(x,y)\in\phi$ píšeme $y=\phi(x)$. Graf $\phi \overset{df.}{=} \{(x,\phi(x)),\ x\in D_\phi\}$

Zobrazení, která zobrazují z číselných množin do číselných množin, jsou funkce

V tomto semestru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nebo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

později: $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^k$, ...

Jiné typy zobrazení: funkcionály, operátory, ...
(nejsme schopni tato zobrazení ani definovat v této chvíli, později v letním semestru nebo AA roč.)

Další důležité pojmy k zobrazením.

Buď $\phi : A \to B$ (nebo $\phi \subset A \times B$) zobrazení z A do B.

Řekneme, že

ϕ zobrazuje A do B $\stackrel{df}{=}$ $A = D_\phi$

ϕ zobrazuje z A do B $\stackrel{df}{=}$ $D_\phi \subset A$

ϕ zobrazuje A na B $\stackrel{df}{=}$ $R_\phi = B$ (ϕ je na nebo surjektivní)

ϕ zobrazuje A do B $\stackrel{df}{=}$ $R_\phi \subset B$

Řekneme, že ϕ je prosté (angl. injective) na množině $A \subset D_\phi$ pokud platí: $(\forall x_1, x_2 \in A)\; x_1 \neq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2)$

$\left(\Longleftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A)\; \phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ načrtnuté na obr. 2 není prostá na $(0, \infty)$:

Buď ϕ prosté zobrazení A na B. Pak lze definovat

$\phi^{-1} : B \xrightarrow{na} A$ předpisem $\phi^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = \phi(x)$

$$\left[\begin{array}{c} (y, x) \in \phi^{-1} \subset B \times A \\ \Updownarrow \\ (x, y) \in \phi \subset A \times B \end{array} \right]$$

a platí:
- $D_{\phi^{-1}} = R_\phi$
- $R_{\phi^{-1}} = D_\phi$
- ϕ^{-1} je prosté
- $(\phi^{-1})^{-1} = \phi$

Dokažte, rozmyslete sami.

Zobrazení ϕ^{-1} se nazývá zobrazení inverzní k ϕ.
(INVERZNÍ ZOBRAZENÍ ϕ^{-1})

Zobrazení ϕ, které je surjektivní (na) a injektivní se nazývá bijektivní (vzájemně jednoznačné).
1 − 1

Def. (složeného zobrazení) Buď $\phi : A \to B$ a $\psi : B \to C$ a nechť $R_\phi \cap D_\psi \neq \emptyset$. Zobrazení $\psi \circ \phi$ nazveme *složené zobrazení* platí-li:

- $D_{\psi\circ\phi} = \{ x \in D_\phi ;\ \phi(x) \in D_\psi \}$
- $(\psi \circ \phi)(x) = \psi(\phi(x)) \quad \forall x \in D_{\psi\circ\phi}$

Příklad (a) Deformace houby (tělesa v $\mathbb{R}^3$)

b) $(\sin x)^2 = f_1 \circ f_2$ kde $f_2(x) := \sin x : \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle$
a $f_1(y) = y^2 : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty)$.

Je-li $\phi : D_\phi \xrightarrow{na} R_\phi$ prosté, pak $\phi \circ \phi^{-1} = \text{Identita}|_{R_\phi}$ zatímco $\phi^{-1} \circ \phi = \text{Identita}|_{D_\phi}$

Buď $\phi : A \to B$ a $C \subset A$, pak $\phi[C] \overset{df}{=} \{ \phi(x) ;\ x \in C \}$ *obraz C*

—||— a $D \subset B$, pak $\phi^{-1}[D] = \{ x \in A ;\ \phi(x) \in D \}$ *vzor (předobraz) D*

Def. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že

f je omezená v $\mathbb{R}$ (nebo v D_f) $\overset{df}{=}$ $f[\mathbb{R}]$ (nebo $f[D_f]$) je omezená množina

f je sudá $\overset{df}{\equiv}$
- $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
- $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D_f$.

f je lichá $\overset{df}{\equiv}$
- $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
- $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$

f je T-periodická $\overset{df}{=}$ $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
pro $T \in \mathbb{R}$
$T > 0$

• ZÁKLADNÍ FUNKCE, JEJICH INVERZE, ABSOLUTNÍ HODNOTA

(i) Funkce $\boxed{x \mapsto x}$ se nazývá identita, či identické zobrazení, $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Prosté a shoduje se s inverzním zobrazením.

(ii) Pro $\boxed{x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}}$ definujeme $x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-krát}}$

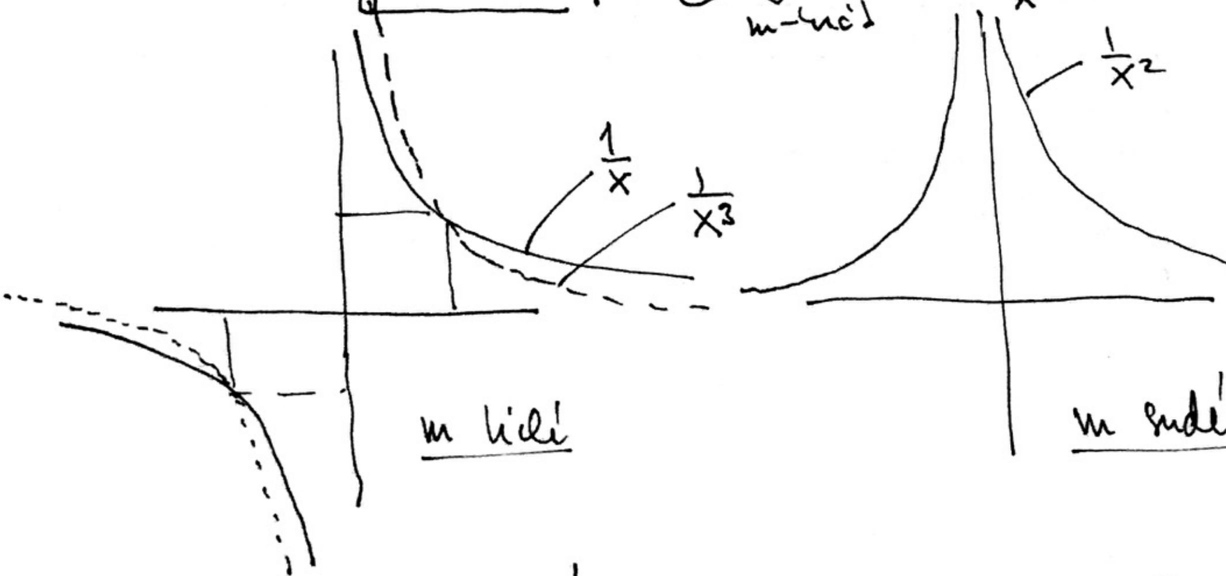
lze uvažovat funkce $\boxed{x \mapsto x^n}$ definované v $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \begin{cases} \langle 0, +\infty) & n \text{ sudé} \\ \mathbb{R} & n \text{ liché} \end{cases}$

Skutečnost, že tyto funkce opravdu zobrazují na $\langle 0,\infty)$ resp. $\mathbb{R}$ vede k řešení úlohy: pro dané $y \in \langle 0,\infty)$ (resp. $\mathbb{R}$) nalézt (!) $x \in \mathbb{R}$ tak, že $x^n = y$

n liché n sudé

K $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ $\exists!\ x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tak, že $x \cdot x^{-1} = 1$

Uvažme $\boxed{x \to x^{-n}} := \underbrace{x^{-1} \cdot \ldots \cdot x^{-1}}_{n\text{-krát}} = \frac{1}{x^n}$



n liché n sudé

Platí:
n liché $x^{\frac{1}{n}} : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$ je inverzní k x^n (lichá f.)
n sudé $x^{\frac{1}{n}} : \langle 0,\infty) \to \langle 0,\infty)$ je inverzní k x^n (sudá f.)
n liché $x^{-\frac{1}{n}} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}\setminus\{0\}$ je inverzní k x^{-n} (lichá f.)
n sudé $x^{-\frac{1}{n}} : (0,\infty) \xrightarrow{\text{na}} (0,\infty)$ —— " —— k x^{-n} (sudá f.)

Kombinací výše uvedených funkcí lze definovat:

$$\boxed{x \longmapsto x^{\frac{p}{q}} \quad \text{kde } p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}} \qquad \boxed{p, q \text{ nesoudělné}}$$

Přirozený definiční obor se liší v závislosti na sudosti/lichosti q a znaménku p:

$$D_{x^{\frac{p}{q}}} = \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \text{pro } q \text{ sudé},\ p>0 \\ (0, +\infty) & \text{pro } q \text{ sudé},\ p<0 \\ \mathbb{R} & \text{pro } q \text{ liché},\ p\geq 0 \\ \mathbb{R}\setminus\{0\} & \text{pro } q \text{ liché},\ p<0 \end{cases}$$

(iii) $x \longmapsto |x|$, kde $|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x\geq 0 \\ -x & \text{pro } x<0 \end{cases}$ zobrazuje $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+\cup\{0\}$

není prosté.

geometrický význam: vzdálenost od počátku

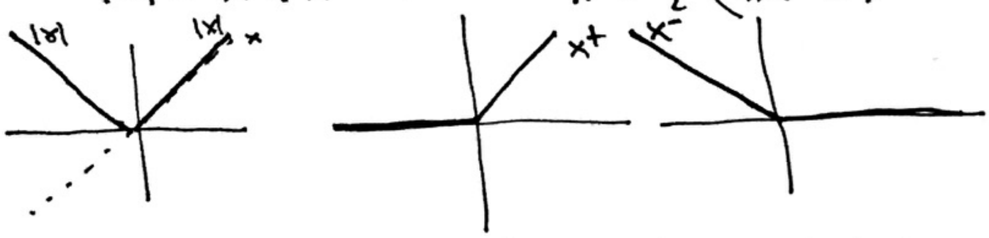
Definujme $x^+ := \max\{0, x\}$

$x^- := \max\{0, -x\}$

Pak $x^+ = \begin{cases} x & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ a $x^- = \begin{cases} 0 & \text{pro } x\geq 0 \\ -x & \text{pro } x<0 \end{cases}$ a

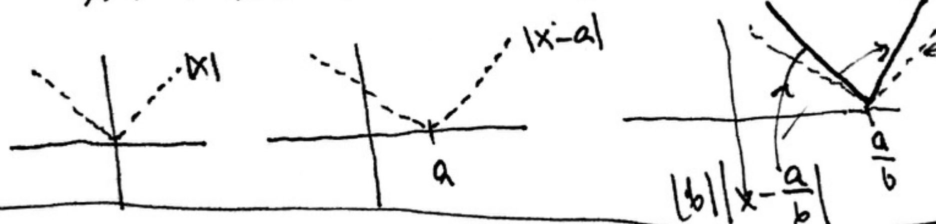
Tedy

$$\left.\begin{aligned} x &= x^+ - x^- \\ |x| &= x^+ + x^- \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x^+ &= \tfrac{1}{2}(|x| + x) \\ x^- &= \tfrac{1}{2}(|x| - x) \end{aligned}$$



$x \longmapsto |x-a| : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}_0^+$ vzdálenost od bodu a

$x \longmapsto |bx-a| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \quad = |b|\left|x - \frac{a}{b}\right|$ ...... $|b|$ krát vzdálenost od $\frac{a}{b}$.



Tvrzení 11 Je-li $a\geq 0$, pak platí: $|x|\leq a \iff -a\leq x\leq a \iff x\in\langle -a, a\rangle$

Dk 2. ekvivalence plyne z definice intervalu. Zbývá dokázat 1. ekvivalenci. Platí

$$\boxed{(\star) \qquad -|x| \leq x \leq |x|}$$

neboť $|x| = x$ nebo $|x| = -x$

$\boxed{\Rightarrow}$ Z $(\star)$ plyne $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$ a tvrzení plyne z podtrženého.

$\boxed{\Leftarrow}$ Protože $-a\leq x\leq a$, tak pro $x\geq 0$: $-a\leq |x|\leq a$

a pro $x\leq 0$: $-a \leq -|x| \leq a$ $\Big\} \Rightarrow |x|\leq a$. ▨

Tvrzení 12 (Δ-nerovnost a její důsledky)

(1) $(\forall x,y \in \mathbb{R})$ $\quad |x+y| \leq |x|+|y|$

(2) $(\forall a,b \in \mathbb{R})$ $\quad |a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$

(3) $(\forall x,y,z \in \mathbb{R})$ $\quad |x-y| \leq |x-z|+|z-y|$

(Dk) $\boxed{\text{Ad (1)}}$ Napišme si (☆) pro x a y. Sečtením $\quad -(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$.

$\Downarrow$ Tvrzení 11

$$|x+y| \leq |x|+|y|.$$

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Z (1) plyne $|x|-|x+y| \geq -|y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Volme $(x=a) \wedge (x+y=b) \Rightarrow y=b-a \Rightarrow |a|-|b| \geq -|b-a|$

Volme $(x=b) \wedge x+y=a \Rightarrow y=a-b \Rightarrow \underbrace{|b|-|a|}_{-(|a|-|b|)} \geq -|a-b| = |b-a|$

$\Rightarrow |b-a| = |a-b| \geq \pm(|a|-|b|)$.

Z obou nerovností plyne tvrzení.

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ $\quad |x-y| = |\underbrace{x-z}_{\xi} + \underbrace{z-y}_{\zeta}| \leq |x-z|+|z-y|$ (Dk)

(1) aplikované na ξ a ζ — zeta, xi

(iv) $z \in \mathbb{C}$: $\quad z \longmapsto z$ identita $\mathbb{C} \xrightarrow{na} \mathbb{C}$ prosté

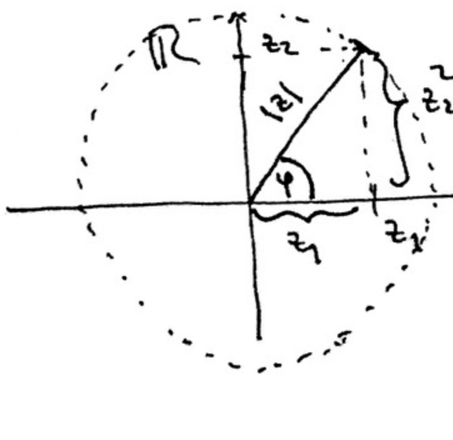
$\underset{(z_1,z_2)}{\shortparallel}$ $\quad z \longmapsto \bar{z}$ $\quad \mathbb{C} \xrightarrow{na} \mathbb{C}$ prosté

$$z \longmapsto |z|_{\mathbb{C}} := \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} = \sqrt{z_1^2+z_2^2}$$

$\mathbb{C} \xrightarrow{na} \langle 0,\infty)$ není prosté

např. pro $\forall z \in \mathbb{C}$ taková, že $z_1^2+z_2^2 = \rho^2$ platí: $|z| = \rho$.

$z \in \mathbb{C} \longmapsto (z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2$ zobrazení je prosté a na (v tomto smyslu lze $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$ ztotožnit)



Z této geometrické interpretace plyne $z_1 = |z|_{\mathbb{C}} \cos\varphi$

$z_2 = |z|_{\mathbb{C}} \sin\varphi$

kde φ se nazývá (hodnota) argument(u) čísla z.

Tvrzení 13 (Vlastnosti $|\cdot|_{\mathbb{C}}$) Platí

(1) $|(0,0)|_{\mathbb{C}} = 0$ a $|z| > 0$ pro $\forall z \neq (0,0)$

(2) $|\underbrace{zu}_{z*u}|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{C}} |u|_{\mathbb{C}}$ a $\left|\frac{z}{u}\right|_{\mathbb{C}} = \frac{|z|_{\mathbb{C}}}{|u|_{\mathbb{C}}}$ pokud $u \neq 0$

(3) $|(x,0)|_{\mathbb{C}} = |x|$

Dk $\boxed{\text{Ad (1) a (3)}}$ přímo z definice $|\cdot|_{\mathbb{C}}$.

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Protože $zu = (z_1u_1 - z_2u_2) + i(z_1u_2 + z_2u_1)$ tak

$$|zu|_{\mathbb{C}}^2 = z_1^2u_1^2 + z_2^2u_2^2 + z_1^2u_2^2 + z_2^2u_1^2 = (z_1^2+z_2^2)(u_1^2+u_2^2) = |z|_{\mathbb{C}}^2 |u|_{\mathbb{C}}^2$$

Druhé tvrzení plyne z již dokázaného, : $z = \frac{z}{u} u \Rightarrow |z|_{\mathbb{C}} = \left|\frac{z}{u}\right|_{\mathbb{C}} |u|_{\mathbb{C}}$. ▨

Tvrzení 14 Pro $u, z \in \mathbb{C}$: $|u+z|_{\mathbb{C}} \le |u|_{\mathbb{C}} + |z|_{\mathbb{C}}$ $\left(\text{Tvrzení 12} \Rightarrow |a-b|_{\mathbb{C}} \ge \big||a|_{\mathbb{C}} - |b|_{\mathbb{C}}\big| \ \forall a,b \in \mathbb{C}.\right)$

Dk pro $u = z = 0$ triviální.

$$(LS)^2 = (u_1+z_1)^2 + (u_2+z_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + z_1^2 + z_2^2 + 2u_1z_1 + 2u_2z_2 = |u|_{\mathbb{C}}^2 + |z|_{\mathbb{C}}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{z}$$

$$(PS)^2 = |u|_{\mathbb{C}}^2 + |z|_{\mathbb{C}}^2 + 2|u|_{\mathbb{C}}|z|_{\mathbb{C}}$$

Vidíme, že stačí ukázat $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{z} \le |u|_{\mathbb{C}} |z|_{\mathbb{C}}}$ (*) kde $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{z} = (z_1, z_2)$

Tato $\le$ ovšem platí obecněji:

Tvrzení 15 (Cauchy-Schwartzova $\le$ v $\mathbb{R}^k$) $\quad \mathbb{R}^k = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$

Pro $\vec{a} \in \mathbb{R}^k, \vec{b} \in \mathbb{R}^k$: $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|_{\mathbb{R}^k} |\vec{b}|_{\mathbb{R}^k}$ (CS)

kde $|\vec{a}|_{\mathbb{R}^k} \overset{\text{df.}}{=} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{1/2}$

(*) je speciální případ (CS) kde $\mathbb{C}$ ztotožníme s $\mathbb{R}^2$.

Dk Vždy $\sum_{i=1}^{k} (a_i x + b_i)^2 \ge 0$. Odtud plyne

(**) $\quad Ax^2 + 2Bx + C \ge 0$ kde $A = \sum_{i=1}^{k} a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{k} a_ib_i$ a $C = \sum_{i=1}^{k} b_i^2$

Když $A = 0$, pak $\vec{a} = \vec{0}$ a (CS) plyne snadno.

Pokud $A \neq 0$, volme $x = -\frac{B}{A}$ a dostáváme

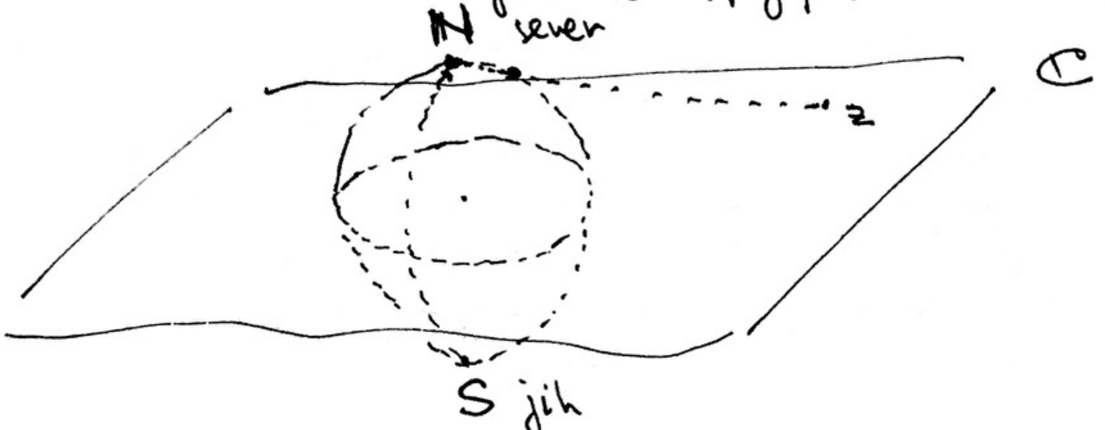
$$\frac{B^2}{A} - \frac{2B^2}{A} + C \ge 0 \iff \underline{B^2 \le AC}$$ což po odmocnění dává (CS). ▨

Vlastnost (3) Tvrzení 13 ukazuje, že $|\cdot|$ je speciální případ $|\cdot|_{\mathbb{C}}$ a ta je speciální případ $|\cdot|_{\mathbb{R}^k}$. Často budeme psát ve všech případech $|b|$, a o tom, kterou normu myslíme rozhodne zda $b \in \mathbb{R}$ nebo $b \in \mathbb{C}$ nebo $b \in \mathbb{R}^k$.

$\mathbb{C}^*$, $\mathbb{R}^*$ ROZŠIŘUJÍCÍ $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$. Pojem OKOLÍ BODU

Uvažujme ještě jiný způsob zobrazení $\mathbb{C}$ pomocí stereografické projekce: $\mathbb{C} \to \underbrace{S_2 \setminus \{N\}}$ jednotková sféra bez severního pólu.

je definována tak, že
každému $z \in \mathbb{C}$ přiřadí bod na sféře, který protne přímka spojující **N** s A. (viz obrázek)



Otázky Kam se zobrazí počátek? kam jednotková krušnice tzn. $\{|x| \in \mathbb{C}; |x|_{\mathbb{C}} < 1\}$
Kam $\{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}$. Jaké body se zobrazí na ~~\~~ kružnici?

Vidíme:

$\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\} \xrightarrow{\text{na}}$ dolní (jižní) polokouli

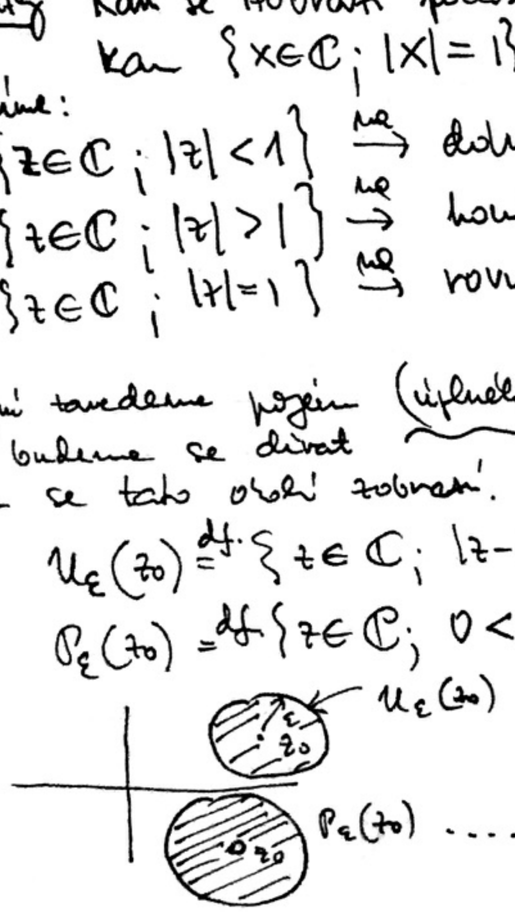
$\{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\} \xrightarrow{\text{na}}$ horní (severní) polokouli

$\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \xrightarrow{\text{na}}$ rovník.

Nyní zavedeme pojem (úplného a prstencového) okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a budeme se dívat kam se tato okolí zobrazí. Pro $\varepsilon > 0$

$U_\varepsilon(z_0) \overset{df.}{=} \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0|_{\mathbb{C}} < \varepsilon\}$ úplné ε-ové okolí z_0

$P_\varepsilon(z_0) \overset{df.}{=} \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ prstencové ε-ové okolí z_0



.... bod $z_0 \notin P_\varepsilon(z_0)$.

Platí: $U_\varepsilon(z_0) = P_\varepsilon(z_0) \cup \{z_0\}$

$\underbrace{\{z \in \mathbb{C}; |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}}$ se zobrazí na oblast kolem severního pólu

Tuto množinu nazveme okolím $\boxed{\infty}$ (symbol bez znaménka + či −) → nekonečno.

Definujme $\boxed{\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}}$. Pak stereografická projekce zobrazuje $\mathbb{C}^*$ na S_2.

Máme-li $x_0 \in \mathbb{R}$ (lze se na něj podívat jako bod $z_0 = (x_0, 0)$, uvažovat pro něj ε-okolí a to pak zúžit na $\mathbb{R}$)

definujme

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

$$P_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$$

Protože na $\mathbb{R}$ (na rozdíl od $\mathbb{C}$) máme uspořádání $>$, lze mluvit/definovat pravé a levé okolí:

$$U^+_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R};\ x - x_0 \geq 0 \wedge x - x_0 < \varepsilon\} = \langle x_0, x_0 + \varepsilon)$$

$$P^+_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R};\ x - x_0 > 0 \wedge x - x_0 < \varepsilon\} = (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

$$U^-_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R};\ x - x_0 \leq 0 \wedge x - x_0 < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0\rangle$$

$$P^-_\varepsilon(x_0) = \quad = (x_0 - \varepsilon, x_0).$$

Definujme $\boxed{\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}} = \langle -\infty, +\infty \rangle$

Je smysluplné zavést následující operace na $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$:

	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{C}^*$
(a)	$x \in \mathbb{R}$: $x + (+\infty) = +\infty$, $x - (+\infty) = -\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$, $x - (-\infty) = +\infty$, $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$	$z \in \mathbb{C}$: $z + \infty = z - \infty = \infty$, $\frac{z}{\infty} = 0$
(b)	$x > 0$: $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$; $x < 0$: $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$	$z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$: $z * \infty = \infty$, $\frac{z}{0} = \infty$
(c)	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty = -\infty \cdot -\infty = +\infty \cdot +\infty$; $(-\infty) - (-\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$	$\infty + \infty = \infty$
(d)	$-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$; $(a, +\infty)$ ... okolí $+\infty$ $\forall a \in \mathbb{R}$; $(-\infty, a)$ ... okolí $-\infty$ $\forall a \in \mathbb{R}$; $U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$, $U_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$	

KAŽDÁ MNOŽINA MÁ V $\mathbb{R}^*$ SUPREMUM / INFIMUM $\leftarrow$ Je-li $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$, pak $\inf A \leq \sup A$. Je-li $A = \emptyset$, pak $\sup A = -\infty$, $\inf A = +\infty$.