Termín pro odevzdání: čtvrtek 6. května 2021

1. Vypočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = e^{-a|x|} \sin bx, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R},$$

zavedenou jako na přednášce, tedy vztahem

$$\hat{f}(s) \equiv \mathcal{F}[f](s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i2\pi sx}\, \mathrm{d}x.$$

Nápověda – můžete využít následujících poznatků:

- Zachování parity (sudosti/lichosti) při Fourierově transformaci.
- Parity integrandu pro omezení oboru integrace.
- Součtových vzorců pro goniometrické funkce.
- Vztahu

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(\beta x)\, \mathrm{d}x = \frac{a}{a^2 + \beta^2} \quad (a > 0,\ \beta \in \mathbb{R}).$$

V případě použití tento vztah ověřte!

Řešení:

Funkce $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ je lichá, tedy její Fourierova transformace $\hat{f}(s)$ bude též lichá.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \sin(bx)\, e^{-i2\pi sx}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \sin(bx) \left[\cos(2\pi sx) - i \sin(2\pi sx)\right] \mathrm{d}x \\
&= -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \sin(bx)\, \sin(2\pi sx)\, \mathrm{d}x \quad (\text{neboť } \hat{f} \text{ má být lichá}) \\
&= -2i \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(bx)\, \sin(2\pi sx)\, \mathrm{d}x \quad (\text{neboť integrand je sudý})
\end{aligned}$$

Rozdílem součtových vzorců pro kosinus získáme vztah $\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$, s jehož využitím

$$\hat{f}(s) = -i \int_0^{\infty} e^{-ax} \left[\cos((b - 2\pi s)x) - \cos((b + 2\pi s)x)\right] \mathrm{d}x$$

Zde počítejme

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(\beta x)\, \mathrm{d}x = \mathrm{Re} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{i\beta x}\, \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(i\beta - a)x}}{i\beta - a}\right]_0^{\infty} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{a - i\beta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{a + i\beta}{a^2 + \beta^2}\right) = \frac{a}{a^2 + \beta^2} \quad (a > 0,\ \beta \in \mathbb{R})$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\hat{f}(s) &= -i \left[\frac{a}{a^2 + (b - 2\pi s)^2} - \frac{a}{a^2 + (b + 2\pi s)^2}\right] \\
&= -ia \left[\frac{a^2 + b^2 + 4\pi bs + 4\pi^2 s^2 - [a^2 + b^2 - 4\pi bs + 4\pi^2 s^2]}{[a^2 + (b - 2\pi s)^2][a^2 + (b + 2\pi s)^2]}\right] \\
&= \frac{-i8\pi abs}{[a^2 + (b - 2\pi s)^2][a^2 + (b + 2\pi s)^2]}
\end{aligned}$$