

4.4. Taylorovy polynomy

Bud' $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkce, u' v bode $x_0 \in D_f$ existuji $f'(x_0)$.

Pal $P_1(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

ji nejsem tečna k funkci f v bode x , ale P_1 ji polynomi stupně 1, tedy (lineární) aproximuje f v bode x_0 . Druháme potdíl (zbytek, zůstatek) mezi f a P_1 symbolem R_2 , tu.

$$R_2(x) := f(x) - P_1(x)$$

Ukáže, u' A existence $f'(x_0)$ plyne $R_2(x) = o(x - x_0)$.

Vsuvku:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Plach' dokonce silnější tvrzení:

Věta 4.18 $f'(x_0)$ existuje $(\Rightarrow) R_2(x) = o(x - x_0)$

(Dě) Implikace $(\Rightarrow)$ jsme již dořídili. Opacní implikace $(\Leftarrow)$ se dořídí takto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_1(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

De Vety o limitě nule

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x)}{x - x_0} + f'(x_0) \stackrel{\text{dle předpokladu}}{=} \underline{\underline{f'(x_0)}}$$

Vidíme tedy, u' P_1 ni aproximuje f v (ořadí) bode x_0 .

Nolm se ptát obecněji, zda lze funkci f aproximovat polynomen

$$P_m(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_m(x - x_0)^m$$

tak, u'

$$(1) \quad P_m(x_0) = f(x_0), \quad P'_m(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad P^{(k)}_m(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad \dots, \quad P^{(m)}_m(x_0) = f^{(m)}(x_0).$$

Z podmínek (1) a obecného tvaru polynomu P_m plyne

$$(1') \quad a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad k! a_k = f^{(k)}(x_0), \quad m! a_m = f^{(m)}(x_0).$$

neboli

$$\left[a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots, m \right]$$

To nás přivádí k definici:

Def n -tý Taylorův polynom fce f v bodě x_0

$$P_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

a také se Autorem Věty 4.18:

Věta 4.19 Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ existují.

Pak existuje právě jeden polynom Q_n stupně (nejvýše) n tak, že

$$(*) \quad f(x) - Q_n(x) = o((x-x_0)^n)$$

Naně,

$$Q_n = P_n.$$

Důk Existence Kandidátem na Q_n je polynom P_n definovaný výše.

z Věty 4.18 víme, že $f(x) - P_1(x) = o(x-x_0)$, což je tvrzení pro $n=1$.

Je-li $n \geq 2$, pak chceme ukázat, že

$$L := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

což však ověříme použitím-li $(n-1)$ krát L'Hospitalova pravidla:

$$L \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - P'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \stackrel{(n-2)\text{krát}}{=} \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)$$

$$= 0.$$

Jednoznačnost Požadavek $(*)$ implikuje podmínky $(1')$. Ale takový polynom je jen jeden. Kdyby byly dva, tak jejich rozdíl mohl zápat ve tvaru $A_0 + A_1(x-x_0) + \dots + A_n(x-x_0)^n$ a koeficienty musí splňovat $A_0 = A_1 = \dots = A_n = 0$, což implikuje tvrzení.

Příklady Funkce e^x , $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cos x$, $\sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$;

Funkce $\log(1+x) \in C^\infty((-1, +\infty))$, $\log(1-x) \in C^\infty((-\infty, 1))$ a

$$(1+x)^\alpha := \exp(\alpha \log(1+x)) \in C^\infty((-1, +\infty)), \text{ kde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pro tyto funkce je jednoduší (viz přednáška resp. proveďte sami) nalézt Taylorovy polynomy v bodě 0. Platí: $m \in \mathbb{N}$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\log(1-x) = - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

připomeň $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{ kde } \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Ažkoliv kterouz vžitých aproximací funkcí v bodě (či oždi bodu) $x_0=0$, takž ji až potozrhodně, i. platí:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{po všechna } x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

po všechna $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

po všechna $x \in \mathbb{R}$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

po všechna $x \in (-1, 1] \equiv (-1, 1)$

$$\log(1-x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

po všechna $x \in [-1, 1) \equiv (-1, 1)$.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

po všechna $x \in (-1, 1)$.

Viz též grafy na následující straně.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

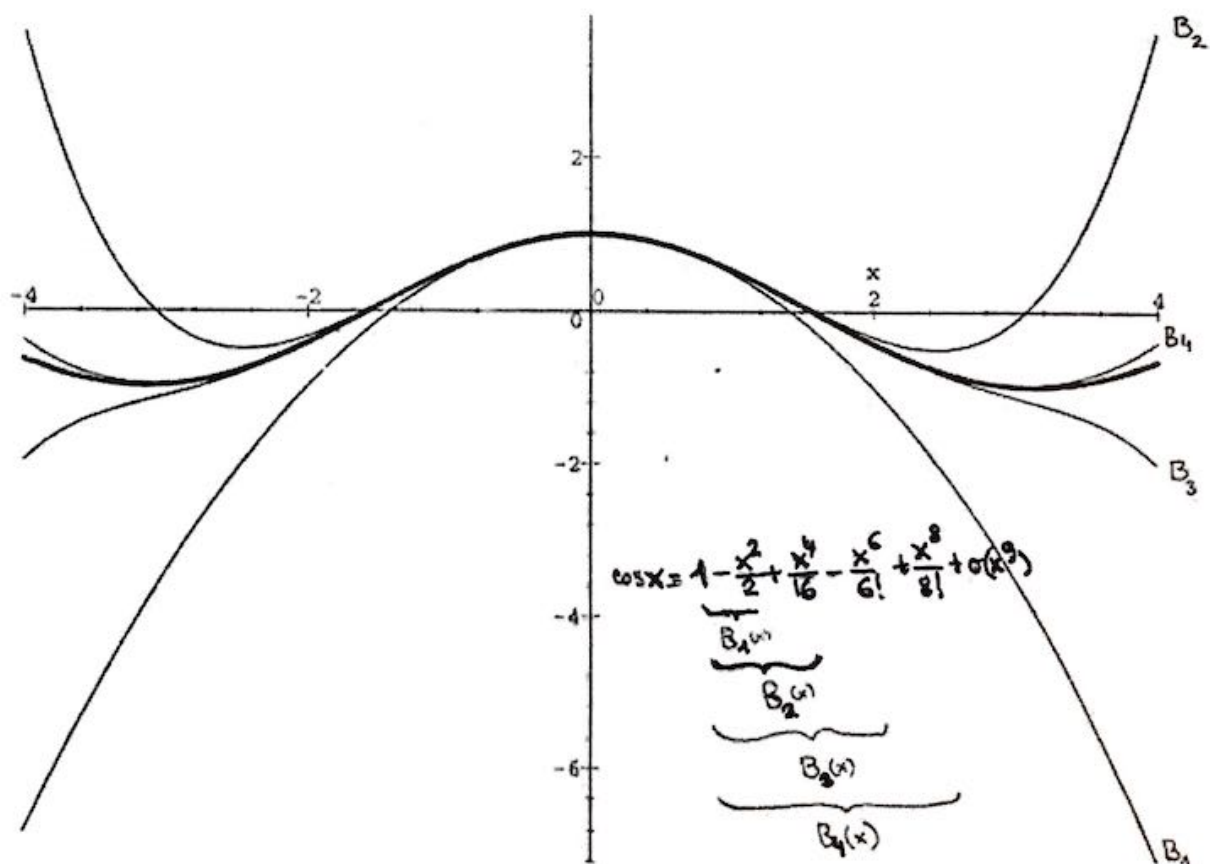
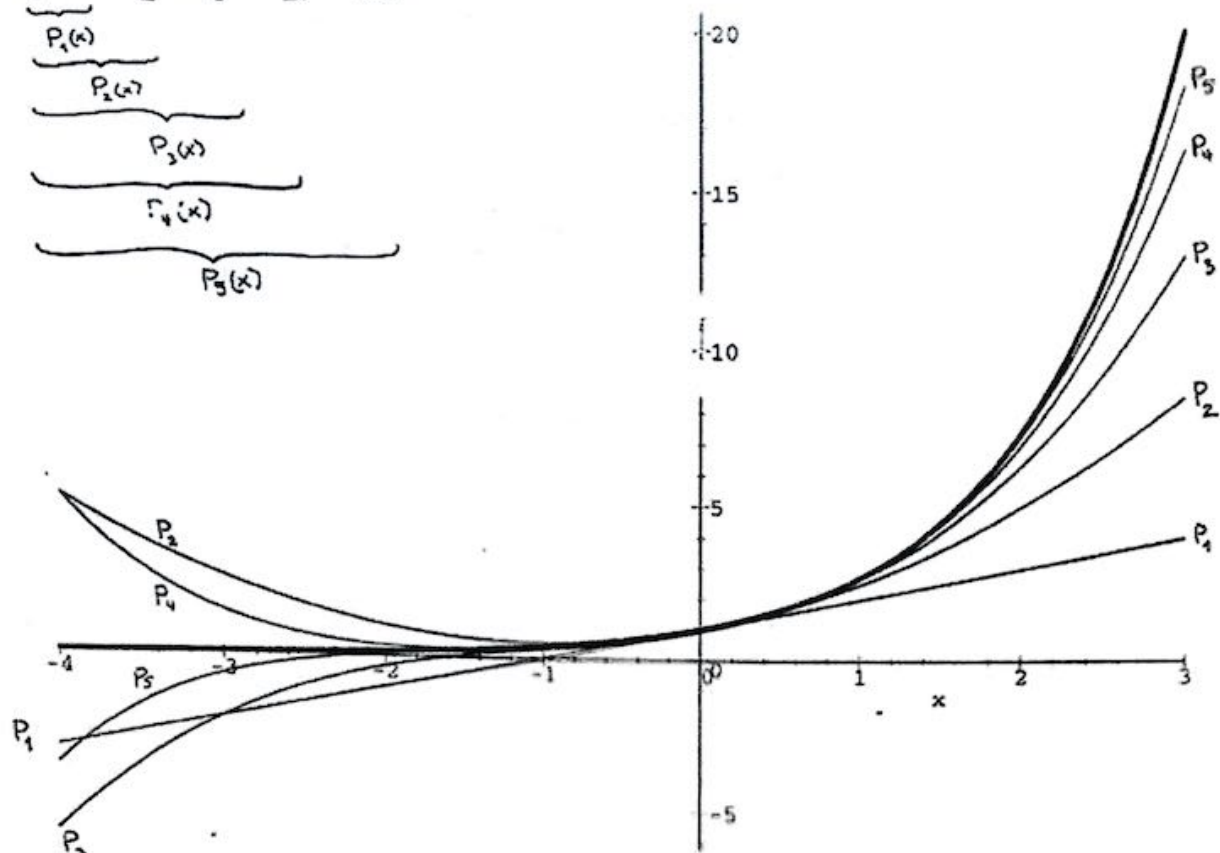
$P_1(x)$

$P_2(x)$

$P_3(x)$

$P_4(x)$

$P_5(x)$



$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + o(x^9)$$

$B_1(x)$

$B_2(x)$

$B_3(x)$

$B_4(x)$

Definujeme rozdíl (rest, remainder) mezi f a P_n :

$$R_{n+1}(x) := f(x) - P_n(x)$$

Z věty 4.19 plyne, že $\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \rightarrow 0$ (nebo $R_{n+1}(x) = o((x-x_0)^{n+1})$)

neboli

$$(2) \quad R_{n+1}(x) = A(x)(x-x_0)^{n+1} \quad \text{kde } A(x) \rightarrow 0 \text{ po } x \rightarrow x_0.$$

Útěrka: Lze o řadě R_n získat lepší informaci (předtím bych věděl více informaci o hodnotě f)?

Odpověď je kladná a je polehku použitelná pomocí důležitých.

Začneme vyjádřit přímocným postupem a jít po R_2 .

Hrubý odhad $R_2(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0).$

K odhadu využijeme předpoklad, že na nějakém okolí x_0 existují $f''(t)$ a jsou omezené. Pak pomocí dvojitého použití LVOSH (Lagrangeova věta o střední hodnotě) dostáváme

$$\begin{aligned} R_2(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \\ &= f'(\xi)(x-x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \\ &= (f'(\xi) - f'(x_0))(x-x_0) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{LVOSH } \xi \in (x_0, x) \\ \text{LVOSH } z \in (x_0, x) &= f''(z)(x-x_0)^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|R_2(x)| \leq \max_{t \in U_\Delta(x_0)} |f''(t)| (x-x_0)^2} \quad (3)$$

což je lepší informace než (2), nebo (2) implikuje

$$|R_2(x)| \leq |A(x)|(x-x_0) \leq \max_{x \in U_\Delta(x_0)} |A(x)| (x-x_0)$$

Přesnější odhad Odměr (3) lze vylepšit.

Zavedeme pomocnou fci F :

$$(4) \quad F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n$$

Potom platí: $\boxed{F(x) = 0} \quad \text{a} \quad \boxed{F(x_0) = R_{n+1}(x)} \quad (5)$

Dále zavedeme fci h takto:

$$(6) \quad h(t) = F(t) - K \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

kde $K \in \mathbb{R}$ zvolíme tak, aby $\boxed{h(x_0) = 0}$. Potom $\boxed{h(x) = 0}$, a $h'(t)$ existují na (x_0, x) lze na fci h aplikovat Rolleovu

větu a dostáváme: $\exists \xi \in (x_0; x)$ tak, ť

$$(7) \quad h'(\xi) = 0$$

$$\text{Analog: } h'(t) = F'(t) + K \frac{(x-t)^m}{m!} = - \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^m}{m!} + K \frac{(x-t)^m}{m!}$$

a tedy (7) implikuje

$$K = f^{(n+1)}(\xi)$$

Z (5) a (6) pak plyne (nebo $h(x_0) = 0$)

$$(8) \quad \underline{R_{n+1}(x)} \stackrel{(5)}{=} F(x_0) \stackrel{(6)}{=} h(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{1} = \underline{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}$$

což je tzv. Lagrangeův tvar zbytku.

Pro $n=1$, speciálně, dostáváme

$$R_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2} (x-x_0)^2 \Rightarrow |R_2(x)| \leq \max_{z \in U_{\Delta}(x_0)} |f''(z)| \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

což vyplývá z hrubý odhad $\approx \frac{1}{2}$.

Výsledek (8) je speciální případ následující věty.

Věta 4.20 (O odhadu chyby Taylorova polynomu)

Nechť $f \in C^n(\langle x_0; x \rangle)$ a $f^{(n+1)}(t)$ existuje na $(x_0; x)$.

Nechť $\phi \in C(\langle x_0; x \rangle)$ a $\phi'(t)$ existuje na $(x_0; x)$.

Pak $\exists \xi \in (x_0; x)$ tak, ť

$$(9) \quad R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^m}{m!} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)$$

Speciálně, pro $\boxed{\phi(t) = (x-t)^{n+1}}$, $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$
Lagrangeův tvar zbytku

pro $\boxed{\phi(t) = t}$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{m!} (1-\theta)^m (x-x_0)^{n+1}, \text{ kde } \theta := \frac{\xi - x_0}{x - x_0} \in (0, 1)$$

Cauchyův tvar zbytku

Důkaz Věty 4.20 Uvažujme F definovanou ve vzorci (4) vyše.

Víme: $F(x) = 0$, $F(x_0) = R_{n+1}(x)$ a $F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n$

Dle Cauchyho věty o střední hodnotě:

$$\exists \xi \in (x_0, x): \underbrace{F(x_0) - F(x)}_{R_{n+1}(x)} = \frac{F'(\xi)}{F'(\xi)} (\phi(x_0) - \phi(x))$$

což implikuje

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(\xi)}, \text{ což je (9).}$$

Zbytek plyne A volby speciálních ϕ a úpravami. Provedk.
[u Cauchyho tvaru zbytek zvolk θ tak, ať $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$.] $\square$

Jedním z významných důsledků předchozích úvah a věz je postačující podmínka pro globální extrém.

Věta 4.21 (Postačující podmínka pro globální extrém).

Pond $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a $x_0 \in (a, b)$.

Jestliže $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq f''(x) < +\infty \text{ po všechna } x \in (a, b) \\ 0 \geq f''(x) > -\infty \end{array} \right\}$ a $f'(x_0) = 0$

pak f má v x_0 $\left\{ \begin{array}{l} \text{globální minimum} \\ \text{globální maximum} \end{array} \right\}$.

(Dě) Důkaz dle věty 4.20

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2 \quad \text{po } x \in (a, b)$$

a $f'(x_0) = 0$, tal

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \geq f(x_0) \\ \leq f(x_0) \end{array} \right. \quad \text{dle předpokladů,}$$

Tedy buď $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (a, b)$ (glob. minimum)

nebo $f(x) \leq f(x_0) \quad \text{---} \quad \text{maximum}$.

Příklad Funkce $f(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ a $a_1 > 0$ $\square$

má v bodě $x_0 = -\frac{a_2}{2a_1}$ globální minimum, neboť $f'(x_0) = 0$

a $f''(x) = 2a_1 > 0$ po všechna $x \in \mathbb{R}$.

Příklad ① Určete $L := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} \frac{(\sin x - x)^3}{(e^x - 1 - x)^2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

Rěšení Námě:

- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \Rightarrow \sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^4)$
 $\Rightarrow (\sin x - x)^3 = -\frac{x^9}{6^3} + o(x^{10})$

- $(e^x - 1 - x)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$

- $\ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$
 $= 2x + \frac{2x^3}{3} + o(x^4)$

Tedy $(\sin x - x)^3 \ln \frac{1+x}{1-x} = -\frac{2x^{10}}{6^3} + o(x^{11})$ a $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x^{10}}{6^3} + o(x^{11})}{\frac{x^4}{4} + o(x^5)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3 \cdot 36} + o(x)}{\frac{1}{4} + o(x)} = -\frac{4}{3 \cdot 36} = -\frac{1}{27}$$

$L = -\frac{1}{27}$

② Určete Taylorův polynom pro $\tan x$ pro $x_0 = 0$.

$\left[\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \right] \quad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \tan'' x = \frac{+2 \sin x}{\cos^3 x}, \quad \tan''' x = \frac{2 \cos^4 x + 6 \cos^2 x \sin^2 x}{\cos^6 x}$
 $= \frac{2 \cos^2 x + 6 \sin^2 x}{\cos^4 x}$
 $= \frac{2 + 4 \sin^2 x}{\cos^4 x}$

a) průběh + definice

$$\tan x = x + \frac{2x^3}{3!} + o(x^4) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

b) 2 Taylorovy řady pro $\sin$ a $\cos$

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) &: 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\ - x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} + o(x^6) & \\ \hline \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5!}x^5 + o(x^6) & \\ - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + o(x^6) & \\ \hline \frac{1}{6}\left(1 - \frac{4}{5}\right)x^5 + o(x^6) & \\ \frac{4}{30} = \frac{2}{15} & \end{aligned}$$

c) Pomocą wozów po wzrost geometrical ряду

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n + o(x^n)} = \frac{f(x)}{\beta_0} \frac{1}{1 - \underbrace{\left(-\frac{\beta_1}{\beta_0} x - \frac{\beta_2}{\beta_0} x^2 + o(x^2) \right)}_G}$$

$$= \frac{f(x)}{\beta_0} \left\{ 1 + G + \dots + G^n + \dots \right\}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} = \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right)}_G}$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)}_G + \frac{x^4}{4} + o(x^5) + o(x^5)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^5)$$

$$\begin{aligned} \tan x &= \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^5) \right) \\ &= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{12} + \frac{5}{24} \right) x^5 + o(x^6) \\ &= x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1 - 10 + 25}{120} x^5 + o(x^6) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6) \end{aligned}$$

d) Metoda neurachy wzrost

$$\text{Wim} \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \beta_1 x + \beta_3 x^3 + \beta_5 x^5 + o(x^6)$$

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) &= (\beta_1 x + \beta_3 x^3 + \beta_5 x^5 + o(x^6)) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right) \\ \text{---} &= \beta_1 x + \left(\beta_3 - \frac{\beta_1}{2} \right) x^3 + \left(\beta_5 - \frac{\beta_3}{2} + \frac{\beta_1}{4!} \right) x^5 + o(x^6) \end{aligned}$$

$$\boxed{\beta_1 = 1}$$

$$\beta_3 - \frac{\beta_1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{120} = \beta_5 - \frac{\beta_3}{2} + \frac{\beta_1}{24}$$

$$\boxed{\beta_3 = \frac{1}{3}}$$

$$\beta_5 = \frac{1}{120} + \frac{1}{6} - \frac{5}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$$

$$\boxed{\beta_5 = \frac{2}{15}}$$