Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. V případě studia číselných řad doslovně uveďte jaké kritérium používáte při studiu konvergence. Ve výpočtech můžete bez dalšího komentáře používat známé výsledky ohledně konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, vlastnosti řad $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$, a dále Taylorovy rozvoje elementárních funkcí.

Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	6	7	5	5	6	7	36
Získáno							

[6] 1. Metodou rozvoje do Taylorových polynomů určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\ln(1+x)) - \cos x - ax^3}{x^4}$$

existovala a byla konečná. (To jest aby bylo $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, kde $L \in \mathbb{R}$.)
Určete hodnotu limity pokud jsou splněny vámi určená omezení na konstantu a.

Řešení:

Taylorovy rozvoje $\ln(1+x)$ a $\cos x$ jsou

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^5\right),$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right),$$

užitím těchto vzorců dostaneme

$$\begin{aligned}
\cos(\ln(1+x)) - \cos x - ax^3 &= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right)\right)^4 \\
&\quad - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^5\right)\right) - ax^3 \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 + o\left(x^4\right)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right) - ax^3 \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right)\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 + o\left(x^4\right)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right) - ax^3 \\
&= \frac{1}{2}x^3 - \frac{11}{24}x^4 - ax^3 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Odtud je okamžitě vidět, že je nutné aby $a = \frac{1}{2}$, hodnota limity je pak $-\frac{11}{24}$.

[7] 2. Budíž dána funkce $f : \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{e}^{2x^2+y^2} - 1}{x^2 + \frac{y^2}{2}}.$$

a) Dodefinujte funkci f v bodě $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ vhodným způsobem tak, aby funkce f s vámi zvolenou hodnotou v bodě $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ byla v tomto bodě spojitá. Spojitost vámi definované funkce jasně odůvodněte.

b) Pro vámi dodefinovanou funkci spočtěte *dle definice* parciální derivace podle x a y v bodě $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

c) Pro vámi dodefinovanou funkci zjistěte, zda existuje totální diferenciál $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$. Pokud ano, spočtěte ho.

Řešení:

Využijem znalosti základní limity $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z} = 1$. Nejprve spočteme limity po přímkách, volíme

$$\begin{aligned} x &= s, \\ y &= ks, \end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{R}$, a zkoumáme limitu pro $s \to 0+$. Jest

$$\lim_{s\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{2s^2+k^2s^2} - 1}{s^2 + \frac{k^2s^2}{2}} = \lim_{s\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{\left(2+k^2\right)s^2} - 1}{\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)s^2} = \lim_{s\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{\left(2+k^2\right)s^2} - 1}{\left(2+k^2\right)s^2} \frac{\left(2+k^2\right)s^2}{\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)s^2} = \lim_{s\to 0+} \frac{\left(2+k^2\right)s^2}{\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)s^2} = \frac{2+k^2}{1+\frac{k^2}{2}} = 2.$$

Limita je zjevně nezávislá na volbě k. Zbývá ověřit, že limita bude existovat nejen ve smyslu přibližování po přímkách, ale také jako limita funkce více proměnných. Chceme ukázat, že platí

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathrm{e}^{2x^2+y^2} - 1}{x^2 + \frac{y^2}{2}} = 2.$$

(Pokud limita existuje, tak její hodnota musí být totožná s limitou po přímkách.) Zavedeme-li v $\mathbb{R}^2$ polární souřadnice, to jest

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned}$$

pak původní limita přejde na

$$\begin{aligned} \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathrm{e}^{2x^2+y^2} - 1}{x^2 + \frac{y^2}{2}} &= \lim_{r\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{2r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} - 1}{r^2\cos^2\varphi + \frac{r^2}{2}\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{\left(2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)r^2} - 1}{r^2\cos^2\varphi + \frac{r^2}{2}\sin^2\varphi} \\ &= \lim_{r\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{\left(2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)r^2} - 1}{\left(2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)r^2} \frac{\left(2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)r^2}{\frac{r^2}{2}\left(2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = 2, \end{aligned}$$

bez ohledu na úhlovou proměnnou φ. (Opět jsme využili dříve diskutovanou známou limitu reálné funkce jedné reálné proměnné.) Můžeme tedy konstantovat, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definovaná jako

$$f(\boldsymbol{x}) =_{\mathrm{def}} \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{2x^2+y^2}-1}{x^2+\frac{y^2}{2}}, & \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \\ 2, & \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

je spojitou funkcí na svém definičním oboru. (Pro $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ je funkce složením spojitých funkcí, v bodě $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ jsme vhodným nastavením parametrů zajistili, že funkční hodnota je rovná limitě, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\mathbf{0}}$, což je ekvivalentní charakterizace spojitosti.)

Definice parciální derivace vůči proměnné x v bodě $\boldsymbol{x}_0$ je

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{e}_{\hat{x}}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h},$$

kde $\boldsymbol{e}_{\hat{x}}$ je vektor ve směru osy x, $\boldsymbol{e}_{\hat{x}} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. V námi zkoumaném případě je $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ a dostaneme tedy

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mathrm{e}^{2h^2}-1}{h^2} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\left(1+2h^2+2h^4+o\left(h^4\right)\right)-1}{h^2} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2 + o\left(h^2\right)}{h} = 0,$$

kde jsme využili známého Taylorova rozvoje pro exponenciálu. Obdobně postupujeme v případě parciální derivace podle proměnné y, jest

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+h\boldsymbol{e}_{\hat{y}})-f(\boldsymbol{x}_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\mathrm{e}^{h^2}-1}{\frac{h^2}{2}}-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\left(1+h^2+\frac{h^4}{2}+o\left(h^4\right)\right)-1}{\frac{h^2}{2}}-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+o\left(h^2\right)}{h} = 0,$$

kde jsme označili $\boldsymbol{e}_{\hat{y}} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Jest tedy

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = 0,$$

z čehož plyne, že kandidátem na totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ je nulové lineární zobrazení,

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = 0,$$

kde $\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix}\mathrm{h}_1\\\mathrm{h}_2\end{bmatrix}$ je libovolný vektor z $\mathbb{R}^2$. Ověříme, že toto zobrazení vyhovuje požadavkům na totální diferenciál, musíme tedy ověřit, že

$$\left|f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}\right| = o\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^2}\right),$$

kde $\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^2}$ značí standardní Eukleidovskou normu v $\mathbb{R}^2$, tedy $\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$.) Definici lze ekvivalentním způsobem přepsat jako

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}}\frac{\left|f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}\right|}{\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^2}} = 0.$$

Dosazením do definice funkce f a s použitím předpokládaného vztahu pro totální diferenciál $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}0 \leq \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}}\frac{\left|f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}\right|}{\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^2}} &= \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}}\frac{\left|\frac{\mathrm{e}^{2h_1^2+h_2^2}-1}{h_1^2+\frac{h_2^2}{2}}-2\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}}\frac{\left|\frac{\left(1+\left(2h_1^2+h_2^2\right)+O\left(h_1^4+h_2^4\right)\right)-1}{h_1^2+\frac{h_2^2}{2}}-2\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\\ &= \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}}\frac{\left|\frac{O\left(h_1^4+h_2^4\right)}{h_1^2+\frac{h_2^2}{2}}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}}\frac{\left|\frac{O\left(h_1^4+h_2^4\right)}{h_1^2+h_2^2}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}}\frac{\left|\frac{O\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^2}^4\right)}{\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^2}^2}\right|}{\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^2}} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}}\frac{O\left(\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^2}^4\right)}{\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^2}^3} = 0.\end{aligned}$$

Pro lineární formu $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$ definovanou předpisem $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = 0$ tedy skutečně platí, že $\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}}\frac{\left|f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}\right|}{\|\boldsymbol{h}\|_{\mathbb{R}^2}}$, a daná forma si proto skutečně zaslouží býti nazývána totálním diferenciálem funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$.

Při výpočtu jsme využili ekvivalence norem v $\mathbb{R}^n$, tedy tvrzení, které říká, že pro libovolný pár $p, q \in [1, +\infty]$ existují kladné konstanty C_1 and C_2 takové, že pro každé $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$C_1 \|\boldsymbol{x}\|_{p,\mathbb{R}^n} \leq \|\boldsymbol{x}\|_{q,\mathbb{R}^n} \leq C_2 \|\boldsymbol{x}\|_{p,\mathbb{R}^n}.$$

Speciálně pro volbu $p = 2$ a $q = 4$ tedy platí

$$C_1 \|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2} \leq \|\boldsymbol{h}\|_{4,\mathbb{R}^2} \leq C_2 \|\boldsymbol{h}\|_{2,\mathbb{R}^2} \qquad \text{aneb} \qquad C_1\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(h_1^4+h_2^4\right)^{\frac{1}{4}} \leq C_2\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dále jsme použili známý Taylorův rozvoj pro exponenciálu v bodě $\boldsymbol{u}_0 = \mathbf{0}$,

$$\mathrm{e}^{2u+v} = 1 + \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} + o\left(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{R}^2}^2\right),$$

kde $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$, který lze snadno získat z předpisu pro Taylorův rozvoj funkcí více proměnných

$$g(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} + \left.\begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{x})\\\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \bullet \begin{bmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{bmatrix} \bullet \left.\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(\boldsymbol{x})\\\frac{\partial g^2}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}\begin{bmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{bmatrix} + o\left(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_{\mathbb{R}^2}^2\right).$$

[5] 3. Zjistěte, zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}.$$

Řešení:

Použijeme Cauchy odmocninové kritérium, jest

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{n+3}\right)^{n+3} \left(1 - \frac{3}{n+3}\right)^{-3} = \mathrm{e}^{-3} < 1,$$

a řada tudíž *konverguje* podle Cauchy odmocninového kritéria. Při výpočtu jsme použili známou limitu

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x.$$

[5] 4. Najděte obecné řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 + \cos x.$$

Řešení:

Rovnice je nehomogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty. Nejprve najdeme řešení homogenní rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^3y_{\mathrm{hom}}}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{hom}}}{\mathrm{d}x} = 0,$$

což je snadné. Charakteristický polynom je

$$\lambda^3 + \lambda = 0,$$

a kořeny charakteristického polynomu jsou tedy $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}$ a $\lambda_3 = 0$. Řešením homogenní rovnice je tedy funkce

$$y_{\mathrm{hom}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3,$$

kde C_1, C_2 a C_3 jsou konstanty. Zbývá najít partikulární řešení. Pravá strana nehomogenní rovnice je ve tvaru vhodném pro metodu neurčitých koeficientů.

Nejprve najdeme řešení pro nehomogenní rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^3y_{\mathrm{spec},1}}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{spec},1}}{\mathrm{d}x} = 2.$$

Řešení hledáme ve tvaru $y_{\mathrm{spec},1} = ax$, kde a je konstanta. Po dosazení do rovnice dostaneme

$$a = 2,$$

odkud plyne, že $a = 2$. Partikulární řešení je tedy

$$y_{\mathrm{spec},1} = 2x.$$

Dále najdeme řešení pro nehomogenní rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^3y_{\mathrm{spec},2}}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{spec},2}}{\mathrm{d}x} = \cos x.$$

Řešení hledáme ve tvaru $y_{\mathrm{spec},2} = ax \cos x + bx \sin x$, kde a a b jsou konstanty. Jest

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{spec},2}}{\mathrm{d}x} &= a \cos x - ax \sin x + b \sin x + bx \cos x, \\
\frac{\mathrm{d}^2y_{\mathrm{spec},2}}{\mathrm{d}x^2} &= -a \sin x - a \sin x - ax \cos x + b \cos x + b \cos x - bx \sin x = -2a \sin x - ax \cos x + 2b \cos x - bx \sin x, \\
\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{spec},2}}{\mathrm{d}x} &= -2a \cos x - a \cos x + ax \sin x - 2b \sin x - b \sin x - bx \cos x = -3a \cos x + ax \sin x - 3b \sin x - bx \cos x,
\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice dostaneme

$$-2b \sin x - 2a \cos x = \cos x,$$

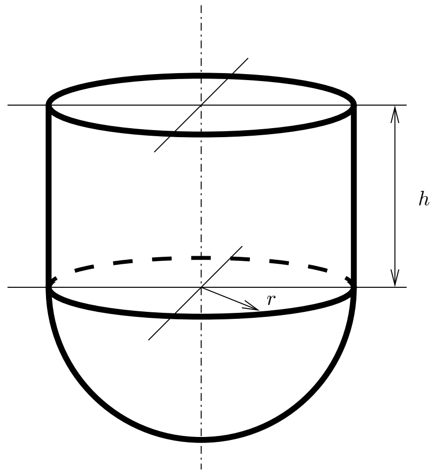
odkud plyne, že $a = -\frac{1}{2}$ a $b = 0$. Partikulární řešení je tedy

$$y_{\mathrm{spec},2} = -\frac{1}{2} x \cos x.$$

Řešení původní rovnice je součtem řešení homogenní rovnice a přislušných partikulárních řešení,

$$y = y_{\mathrm{hom}} + y_{\mathrm{spec},1} + y_{\mathrm{spec},2} = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 + 2x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

[6] 5. Nádoba je tvořená válcem o poloměru podstavy r a výšce h a polokoulí o poloměru r, viz Obrázek 1. Najděte hodnoty parametrů h a r, které pro zadaný objem V_a minimalizují plošný obsah pláště nádoby S. (Plášť nádoby je tvořen pláštěm válce, horní podstavou válce a povrchem polokoule.) *Ukažte, že vámi nalezená hodnota je skutečně minimální!* Připomínáme, že objem koule o poloměru R je dán vzorcem $\frac{4}{3}\pi R^3$, zatímco povrch koule o poloměru R je dán vzorcem $4\pi R^2$.



Obrázek 1: Nádoba.

Řešení:

Objem nádoby je součtem objemů válce a polokoule, jest tedy

$$V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Plošný obsah pláště nádoby je součtem plošných obsahů pláště válce, horní podstavy válce a povrchem polokoule, jest tedy

$$S = 2\pi r h + \pi r^2 + 2\pi r^2.$$

(Není nutné přít se o to, zda je plošný obsah pláště nádoby S—tak by uvažoval matematik—nebo $2S$—tak by uvažoval inženýr, který by měl vypočíst množství barvy potřebné k natření nádoby. Hodnoty r a h, pro které S či $2S$ nabývá minima jsou stejné.) Na položenou otázku tedy získáme odpověď tak, že budeme hledat extrém funkce $S(r,h)$ vůči vazbě $V(r,h) = V_a$. Není však nutné použít Lagrangeovy multiplikátory, neboť vazba

$$\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = V_a,$$

nám umožní snadno vyjádřit výšku válce h jakožto funkci r. Je-li zadán požadovaný objem V_a, pak ze vzorce pro objem plyne, že

$$h = \frac{V_a - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2}.$$

Tento vztah dosadíme do vzorce pro povrch nádoby

$$S = 2\frac{V_a - \frac{2}{3}\pi r^3}{r} + 3\pi r^2 = \frac{2V_a}{r} + \frac{5}{3}\pi r^2,$$

čímž jsme úlohu o vázaném extrému efektivně převedli na úlohu o hledání extrému reálné funkce jedné reálné proměnné. Chceme, aby platilo

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_{\mathrm{ext}}} = 0,$$

což znamená, že poloměr r_{ext}, ve kterém funkce S nabývá extrému je řešením rovnice

$$-\frac{2V_a}{r_{\mathrm{ext}}^2} + \frac{10}{3}\pi r_{\mathrm{ext}} = 0,$$

odkud plyne, že

$$r_{\mathrm{ext}} = \left(\frac{3V_a}{5\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(Poloměr je kladné reálné číslo, ostatní kořeny nás tedy nezajímají.) Nyní ověříme, že jde skutečně o minimum. To provedeme kupříkladu vyšetřením znaménka druhé derivace. Jest

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_{\mathrm{ext}}} = \frac{4V_a}{r_{\mathrm{ext}}^3} + \frac{10}{3}\pi > 0,$$

z čehož plyne, že nalezený extrém je skutečně minimem a dokonce i minimem globálním. (Globálním minimem na množině přípustných poloměrů, tedy pro $r > 0$.) Fakt, že se jedná o globální minimum je zřejmý ze znaménka první derivace.

[7] 6. Uvažujte funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$, které jsou jakožto funkce proměnné x zadány implicitně soustavou rovnic

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{e}^{y_1} + y_2 x - 2 &= 0,\\
y_2 \cos y_1 + 2x &= 0.
\end{aligned}
$$

Vypočtěte $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}$ v okolí bodu $x^0 = 0$, a následně určete hodnoty derivací $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}$ a $\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2}$ v bodě $x^0 = 0$.

Řešení:

K zodpovězení otázky použijeme větu o implicitních funkcích. Označme si

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

a dále

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix}$$

a konečně

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{y_1} + y_2 x - 2 \\ y_2 \cos y_1 + 2x \end{bmatrix}.$$

Nejprve najdeme bod $\boldsymbol{y}_0$, který společně s $\boldsymbol{x}_0$ řeší rovnici

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0},$$

aneb chceme, aby platilo

$$\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{y_1^0} + y_2^0 x^0 - 2 \\ y_2^0 \cos y_1^0 + 2x^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

což po dosazení za $\boldsymbol{x}_0$ vede na soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{y_1^0} - 2 \\ y_2^0 \cos y_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

což dává

$$\boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Připomeneme si formální výpočet dle věty o implicitních funkcích. Je-li $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$, pak

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0},$$

odkud

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}},$$

přičemž jsme použili značení

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

V našem konkrétním případě dostaneme

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} y_2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{y_1} & x \\ -y_2 \sin y_1 & \cos y_1 \end{bmatrix}.$$

Snadno spočteme i inverzní matici k matici $\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}$, jest

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1} = \frac{1}{2\mathrm{e}^{y_1}\cos y_1 + x y_2 \sin y_1} \begin{bmatrix} \cos y_1 & -x \\ y_2 \sin y_1 & 2\mathrm{e}^{y_1} \end{bmatrix}$$

Připomeňme si, že inverzi matice 2×2 lze spočíst pouhým pohledem, je-li $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertibilní matice, pak je $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. (Příslušná říkanka zní "zaměň prvky na diagonále, u prvků mimo diagonálu změň znaménko, a pak všechno vyděl determinantem".) Požadované derivace najdeme dosazením do vztahu

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\left.\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$$

což v našem případě dává
$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -2\end{bmatrix}$$
a proto
$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -2.$$
Abychom zíslali druhou derivaci, musíme se vrátit zpět k obecnému vzorci
$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\left.\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}.$$
Zatím nedosadíme za $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$, což nám umožní psát
$$\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x}\end{bmatrix} = -\frac{1}{2\mathrm{e}^{y_1}\cos y_1 + x y_2 \sin y_1}\begin{bmatrix}\cos y_1 & -x\\ y_2 \sin y_1 & 2\mathrm{e}^{y_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_2\\ 2\end{bmatrix}.$$
Na okolí zkoumaného bodu tedy můžeme psát
$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = -\frac{1}{2\mathrm{e}^{y_1}\cos y_1 + x y_2 \sin y_1}\left(y_2\cos y_1 - 2x\right),$$
a protože potřebujeme získat druhou derivaci v daném bodě, stačí nám zderivovat předchozí rovnost a dosadit za $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$ a využít skutečností, že z předchozího kroku známe i hodnoty derivací $\left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = 0$ a $\left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -2$. Jest tedy
$$\left.\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = -\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\mathrm{e}^{y_1}\cos y_1 + x y_2 \sin y_1}\left(y_2\cos y_1 - 2x\right)\right)\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0},$$
přičemž pro potřeby derivování chápeme y_1 a y_2 jako funkce x aneb $y_1 = y_1(x)$ a $y_2 = y_2(x)$. Derivujeme tedy kupříkladu takto
$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mathrm{e}^{y_1}\cos y_1 + x y_2\sin y_1\right)\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0}\\ &\qquad = \left.\left(2\mathrm{e}^{y_1}\cos y_1\frac{\partial y_1}{\partial x} - 2\mathrm{e}^{y_1}\sin y_1\frac{\partial y_1}{\partial x} + y_2\sin y_1 + x\frac{\partial y_2}{\partial x}\sin y_1 + x y_2\cos y_1\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0} = 0,\end{aligned}$$
a dále
$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(y_2\cos y_1 - 2x\right)\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0} = \left.\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\cos y_1 - y_2\sin y_1\frac{\partial y_1}{\partial x} - 2\right)\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0} = -4.$$
Nyní se můžeme vrátit k původnímu vzorci a s použitím vzorce pro derivaci podílu dostaneme
$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} &= -\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\mathrm{e}^{y_1}\cos y_1 + x y_2 \sin y_1}\left(y_2\cos y_1 - 2x\right)\right)\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0}\\ &= -\frac{\left.\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(y_2\cos y_1 - 2x\right)\right]\left(2\mathrm{e}^{y_1}\cos y_1 + x y_2\sin y_1\right) - \left(y_2\cos y_1 - 2x\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mathrm{e}^{y_1}\cos y_1 + x y_2\sin y_1\right)\right]\right\}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0}}{\left.\left(2\mathrm{e}^{y_1}\cos y_1 + x y_2\sin y_1\right)^2\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0}}\\ &= -\frac{-4\cdot 2 + 0\cdot 0}{2^2} = 2.\end{aligned}$$
Celkem tedy
$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = 2.$$