Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. V případě studia číselných řad doslovně uveďte jaké kritérium používáte při studiu konvergence. Ve výpočtech můžete bez dalšího komentáře používat známé výsledky ohledně konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, vlastnosti řad $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$, a dále Taylorovy rozvoje elementárních funkcí.

Jméno: ______________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	6	6	5	6	6	7	36
Získáno							

[6] 1. Najděte pomocí vhodných Taylorových polynomů

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(2x+x^5)+2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^6}}.$$

Řešení:

Nejprve použijme pravidlo pro výpočet limity složené funkce

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(2x+x^5)+2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^6}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x+x^5)+2\sin^2 x))}{x^6}}.$$

Stačí nám tedy spočítat limitu exponentu, tj.

$$A := \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos(2x+x^5)+2\sin^2 x)\right)}{x^6}.$$

Jelikož máme x^6 ve jmenovateli, stačí určit Taylorův polynom stupně 6 čitatele v bodě $x=0$. Máme

$$\begin{aligned}
\cos(2x+x^5) &= 1-\frac{1}{2!}(2x+x^5)^2+\frac{1}{4!}(2x+x^5)^4-\frac{1}{6!}(2x+x^5)^6+o(x^6)\\
&= 1-\frac{1}{2}(4x^2+4x^6)+\frac{1}{4!}2^4x^4-\frac{1}{6!}2^6x^6+o(x^6)\\
&= 1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+(-2-\frac{4}{45})x^6+o(x^6)\\
&= 1-2x^2+\frac{2}{3}x^4-\frac{94}{45}x^6+o(x^6),\\
\sin^2 x &= \big(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\big)^2\\
&= x^2-\frac{2}{3!}x^4+\frac{x^6}{(3!)^2}+2\frac{x^6}{5!}+o(x^6)\\
&= x^2-\frac{1}{3}x^4+\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{60}\right)x^6+o(x^6)\\
&= x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{8}{180}x^6+o(x^6)\\
&= x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+o(x^6),\ x\to 0.
\end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{gathered}
\cos(2x+x^5)+2\sin^2 x = 1-2x^6+o(x^6),\\
\ln(\cos(2x+x^5)+2\sin^2 x) = \ln(1-2x^6+o(x^6)) = -2x^6+o(x^6),\ x\to 0.
\end{gathered}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x+x^5)+2\sin^2 x))}{\sin^2 x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{-2x^6+o(x^6)}{x^6+o(x^6)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^6(-2+o(1))}{x^6(1+o(1))} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(-2+o(1))}{\lim\limits_{x\to 0}(1+o(1))} = -2
\end{aligned}$$

a

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(2x+x^5)+2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x^3}} = e^{-2}.$$

[6] 2. 1. Ukažte, že funkce

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

je spojitá na $\mathbb{R}^2$.

2. Rozhodněte, zda funkce f má v počátku totální diferenciál.

Řešení:

Funkce f je spojitá mimo počátek, neboť $\sin(x^2+y^2)$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$, $\frac{1}{x^2+y^2}$ je spojitá mimo počátek a součin spojitých funkcí je spojitá funkce. Přechodem k polárním souřadnicím, to jest položíme $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, získáme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\sin r^2}{r^2} = 1 \tag{¶}$$

a funkce f je tedy spojitá i v počátku.

Nyní spočteme první parciální derivace v počátku

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 - x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 + o(x^3)) - x^2}{x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\sin y^2}{y^2} - 1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y^2 - y^2}{y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{(y^2 + o(y^3)) - y^2}{y^3} = 0.$$

Vidíme, že jediný kandidát na totální diferenciál v počátku je nulové zobrazení. Dále

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2) - (x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\sin(r^2) - r^2}{r^3} \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{(r^2 + o(r^3)) - r^2}{r^3} = 0. \end{aligned} \tag{☺}$$

Ukázali jsme, že nulové zobrazení je skutečně totální diferenciál f v počátku.

[5] 3. Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

konverguje absolutně i neabsolutně.

Řešení:

Označme $a_n := \sqrt{n+1}-\sqrt{n},\ n=1,2,\cdots$. Pak

$$a_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

a posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je tedy klesající a konverguje k nule. Z Leibnitzova kritéria tedy plyne, že řada konverguje neabsolutně.

Porovnáním s řadou $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ vidíme, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ diverguje a tedy řada nekonverguje absolutně.

[6] 4. Nejprve najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$. Poté najděte řešení stejné rovnice, pro které platí $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$.

Řešení:
Charakteristický polynom levé strany je $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$ a tedy fundamentální systém homogenní rovnice je $\{1, e^{-x}\}$. Partikulární řešení budeme hledat metodou variace konstant, tedy ve tvaru

$$y_p(x) = C(x) + D(x)e^{-x}.$$

Máme

$$y_p'(x) = C'(x) + D'(x)e^{-x} - D(x)e^{-x}$$

a po položení

$$C'(x) + D'(x)e^{-x} = 0$$

dostáváme

$$y_p'(x) = -D(x)e^{-x}, \quad y_p''(x) = -D'(x)e^{-x} + D(x)e^{-x}$$

a

$$y_p''(x) + y_p'(x) = -D'(x)e^{-x} + D(x)e^{-x} - D(x)e^{-x} = -D'(x)e^{-x}.$$

Tedy

$$-D'(x)e^{-x} = \frac{1}{e^x + 1} \quad \text{a} \quad C'(x) = -D'(x)e^{-x} = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Integrací dostaneme

$$\begin{aligned} C(x) &\overset{c}{=} \int \frac{1}{e^x + 1}\, dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2 + e^x}\, dx = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t^2 + t}\, dx \\ &= \int \frac{1}{t}\, dt - \int \frac{1}{t+1}\, dt \overset{c}{=} \log|t| - \log|t+1| = x - \log(e^x + 1) \end{aligned}$$

a

$$D(x) \overset{c}{=} -\int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx \overset{c}{=} -\log(e^x + 1).$$

Obecné řešení rovnice má tedy tvar

$$y(x) = A + Be^{-x} + x - \log(e^x + 1) - e^{-x}\log(e^x + 1).$$

Protože

$$y'(x) = -Be^{-x} + 1 - \frac{1 + e^{-x}}{e^x + 1} + e^{-x}\log(e^x + 1),$$

dostáváme

$$y(0) = A + B - 2\log(2) \quad \text{a} \quad y'(0) = -B + \log(2).$$

Řešením soustavy

$$A + B - 2\log(2) = 0, \quad -B + \log(2) = 0$$

je $A = \log(2)$ a $B = \log(2)$ a tedy řešení splňující $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$ má tvar

$$y(x) = \log(2)(1 + e^{-x}) + x - \log(e^x + 1) - e^{-x}\log(e^x + 1).$$

[6] 5. Určete lokální i globální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f(x,y) = -2x^2y^2 - x^4 + 2x^2 - y^4 + y^2.$$

Řešení:

Nejprve si všimneme, že f je C^2 na $\mathbb{R}^2$. Spočítáme ∇f. Máme

$$\nabla f(x,y) = (-4x^3 - 4xy^2 + 4x, -4x^2y - 4y^3 + 2y).$$

Chceme řešit rovnici $\nabla f(x,y) = (0,0)$, dostáváme tedy soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= -4x^3 - 4xy^2 + 4x = -4x\left(x^2 + y^2 - 1\right) \\ 0 &= -4x^2y - 4y^3 + 2y = -2y\left(2x^2 + 2y^2 - 1\right) \end{aligned}$$

Probráním všech možností dostáváme tedy řešení $(0,0)$, $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(\pm 1, 0)$.

Spočítáme Hessovu matici funkce f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 - 4y^2 + 4 & -8xy \\ -8xy & -4x^2 - 12y^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Pro jednotlivé body tedy dostáváme

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{matice je pozitivně definitní, jde tedy o bod lokálního minima,}$$

$$H_f(0, \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{matice je indefinitní, jde tedy o sedlové body,}$$

$$H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{matice je negativně definitní, jde tedy o body lokálního maxima.}$$

Pro určení globálních extrémů si nejprve všimneme, že $f(0,y) = y^2 - y^4$ a $\lim\limits_{y \to \pm\infty} f(0,y) = -\infty$ a tedy funkce není omezená zdola a nemá globální minimum.

Dále si všimneme, že $f(x,y) \le 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 =: g(x,y)$. Protože $2t^2 - t^4 < 0$ pro $|t| > \sqrt{2}$, platí $f(x,y) \le g(x,y) < 0 < 1 = f(\pm 1, 0)$, pokud bod (x,y) splňuje $\sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt{2}$. Stačí tedy vyšetřovat globální extrémy vzhledem k $B(0, \sqrt{2})$, což je kompaktní množina, navíc f je spojitá vzhledem k $B(0, \sqrt{2})$ a standardní úvaha dává, že $(\pm 1, 0)$ jsou body globálního maxima f.

Alternativně: pozorujeme, že $f(x,y) = \cancel{2x^2y^2} - (x^2 + y^2)^2$ a funkce f jde pro $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ k $-\infty$. Odtud plyne, že f nemá globální minimum a globálního maxima se nabývá v bodech $(\pm 1, 0)$, kde $f(\pm 1, 0) = 1$.

f(x,y) = x^2 + (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2

[7] 6. Ukažte, že rovnice $xy + z + e^{x+y+z} = 0$ a $x + yz + e^{x+y+z} = 0$ určují v jistém okolí U bodu $(1, 1, -2)$ implicitně zadané zobrazení $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ proměnné x (tedy $y = \varphi_1(x)$ a $z = \varphi_2(x)$). Spočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\varphi_1(x) + x - 2}{\varphi_2(x) + 2}$.

Řešení:

Označme $f_1(x, y, z) = xy+z+e^{x+y+z}$ a $f_2(x, y, z) = x+yz+e^{x+y+z}$ a položme $F = (f_1, f_2)$. Zjevně $F(1, 1, -2) = (0, 0)$ a F je C^1 na $\mathbb{R}^3$. Spočítáme $J_F(1, 1, -2)$, platí

$$J_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + e^{x+y+z} & x + e^{x+y+z} & 1 + e^{x+y+z} \\ 1 + e^{x+y+z} & z + e^{x+y+z} & y + e^{x+y+z} \end{pmatrix}.$$

a tedy

$$J_F(1, 1, -2) = (J_X|J_Y) = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{přičemž} \quad \det(J_Y) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 6 \neq 0$$

Zobrazení φ tedy existuje, je C^1, a platí $\varphi_1(1) = 1$ a $\varphi_2(1) = -2$.

To nám dává, že limita $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\varphi_1(x) + x - 2}{\varphi_2(x) + 2}$ je typu $\frac{0}{0}$. Zkusíme použít l'Hospitalovo pravidlo (alternativně metodu Taylorových polynomů), k čemuž potřebujeme spočítat $\varphi_1'(1)$ a $\varphi_2'(1)$. Podle vzorečku máme

$$J_\varphi(1) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(1) \\ \varphi_2'(1) \end{pmatrix} = -J_Y^{-1} J_X = -\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Za využití faktů, že φ je C^1 a $\varphi_2'(1) \neq 0$, dostáváme $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\varphi_1'(x) + 1}{\varphi_2'(x)} = \dfrac{\varphi_1'(1) + 1}{\varphi_2'(1)} = -1$ a tedy $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\varphi_1(x) + x - 2}{\varphi_2(x) + 2} = -1$.