Z minulého cvičení plyne následující tvrzení:

Věta Je-li $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, pak $u(t,x) = u_0(x-bt)$ je jediné C^1 řešení úlohy (PT)

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + b\cdot\nabla u = 0 \quad \text{v } (0,+\infty)\times\mathbb{R}^d, \quad t \in (0,+\infty),\ x \in \mathbb{R}^d \\ &u(0,\cdot) = u_0(x) \end{aligned}}$$

Dk Existence plyne z vzorečku $u(t,x) = u_0(x-bt)$, po zderivování ověříme, že splňuje rovnici. Také triviálně ověříme nabývání počáteční podmínky.

Jednoznačnost plyne z úvah na minulém cvičení:
Je-li totiž $u(t,x)$ řešení (PT), a (t,x) libovolný, pak tímto bodem prochází jediná charakteristika, na níž je řešení konstantní; charakteristika je přímka a hodnota na této přímce je dána počáteční podmínkou. Q.E.D.

Připomenutí Řešení $\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ v $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ s $u(0,\cdot) = u_0$ v $\mathbb{R}$ najdeme metodou charakteristik touto úvahou:

a) Charakteristický systém $\dot t(s) = 1$, $\dot x(s) = b$ s počáteční podmínkou $t(0) = t$, $x(0) = x$

dává $t(s) = s+t$, $x(s) = bs + x$. Víme tedy

$$u(t,x) = u(t(s),x(s))\big|_{s=0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{řešení je na charakteristikách konstantní}}}{=} u(t(s),x(s))\big|_{s=-t} = u(0,x-bt) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{poč. data}}}{=} u_0(x-bt)$$

b) Charakteristický systém $\dot t(s) = 1$, $\dot x(s) = b$ implikuje $\frac{d}{ds}\big(x(s) - b\,t(s)\big) = 0$

tedy $x(s) - b\,t(s) = \text{konstanta } C$ $(\forall s)$ $\Leftrightarrow$ charakteristiky jsou množiny bodů (t,x) splňující $x - bt = C$

Na charakteristikách je řešení konstantní

$$u(t,x) = u(t, C+bt) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hodnota pro } t=0}}{=} u(0,C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{data}}}{=} u_0(C) = u_0(x-bt).$$

Příklady na cvičení

(1) $\boxed{\begin{aligned} &\partial_t u + t\,\partial_x u = 0 \\ &u(0,x) = \sin x \end{aligned}}$

Řešení: $\boxed{\begin{aligned} \dot t(s) &= 1 \\ \dot x(s) &= t(s) \end{aligned}} \Rightarrow \begin{aligned} t(s) &= s + \bar t \\ \dot x(s) &= s + \bar t \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} t(s) &= s + \bar t \\ x(s) &= \frac{s^2}{2} + \bar t s + \bar x \end{aligned}}$ (Ch)

vidíme, že pro $s=0$ charakteristika prochází bodem $(\bar t, \bar x)$.

Hledané řešení $u(\bar t, \bar x)$ splňuje

$$\underline{\underline{u(\bar t,\bar x)}} = u(t(s),x(s))\Big|_{s=0} \overset{\text{konst. podél charakteristiky}}{=} u(t(s),x(s))\Big|_{s=-\bar t}$$

$$= u\left(0, \frac{\bar t^2}{2} - \bar t^2 + \bar x\right) \underset{\text{poč. podmínka}}{=} \underline{\underline{\sin\left(\bar x - \frac{\bar t^2}{2}\right)}}$$

VIDÍME, ŽE JSME SI PRUHY NAD t a x MOHLI ODPUSTIT.

(2) $\boxed{\begin{aligned} &\partial_t u + t\,\partial_x u = 0 \\ &u(t,0) = g(t) \end{aligned}}$

Řešení: Charakteristický systém je stejný, tzn. (Ch).

Nyní však z (Ch) potřebujeme určit s, pro které bude $x = x(s) = 0$ *). Tj. řešíme kvadratickou rovnici $\frac{s^2}{2} + \bar t s + \bar x = 0$

$\Rightarrow s_{1,2} = -\bar t \pm \sqrt{\bar t^2 - 2\bar x}$. Rovnice nemá řešení pokud $(\bar t - \sqrt{2\bar x})(\bar t + \sqrt{2\bar x}) < 0$, tzn. $(\bar t, \bar x)$ splňuje $\bar x > 0$ a $\bar t \in (-\sqrt{2\bar x}, \sqrt{2\bar x})$. Tedy na množině $\{(\bar t,\bar x);\ \bar x > 0 \text{ a } \bar t \in (-\sqrt{2\bar x}, \sqrt{2\bar x})\}$ nemám řešení.

Na doplňku této množiny platí

$$u(\bar t,\bar x) = u(t(s),x(s))\Big|_{s=0} = u(t(s),x(s))\Big|_{s=-\bar t \pm \sqrt{\bar t^2 - 2\bar x}}$$

$$\overset{(Ch)}{=} u\left(\pm\sqrt{\bar t^2 - 2\bar x}, 0\right) \underset{\text{poč. podmínka}}{=} g\left(\pm\sqrt{\bar t - 2\bar x}\right).$$

Odsud plyne, že funkce g je sudá. musí být ($g(0) = 0$.).

*) abych mohl využít počáteční podmínku.

Fourierova transformace nefunguje pro $\vec{b}$ závislé na x.
Postup v řešení 3 lze však snadno zobecnit pro $\vec{b} = \vec{b}(t)$.

<u>Příklad</u> Najděte obecné řešení rovnice

(#) $$y \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + x \frac{\partial (x,y)}{\partial y} = 0$$

<u>Řešení</u> Char. systém má tvar

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(s) &= y(s) \\ \dot{y}(s) &= x(s) \end{aligned}}$$

Násobením 1. rce $x(s)$ a druhou $y(s)$, dostaneme, po odečtení,

$$x(s)\dot{x}(s) - y(s)\dot{y}(s) = 0,$$

což je ekvivalentní $\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(x^2(s) - y^2(s)\right) = 0$

Charakteristiky splňují $x^2(s) - y^2(s) = \text{konst.}$ a víme, že řešení u je konstantní na těchto křivkách, tedy

$$u(x,y) = g\left(x^2 - y^2\right)$$ je třída obecných řešení (#)

pro $g \in C^1$ libovolné.

$x^2(s) - y^2(s) = \bar{x}^2 - \bar{y}^2$

$$\boxed{y^2(s) - \bar{y}^2 = x^2(s) - \bar{x}^2}$$

$y^2(s) = (x^2(s) - \bar{x}^2) + \bar{y}^2$

$y(s) = \sqrt{(x^2(s) - \bar{x}^2) + \bar{y}^2}$

$y^2 - x^2 = 1$

$y(x) = \pm\sqrt{1 + x^2}$

$x^2 + y^2 = 1$

$x^2 - y^2 = 1$

Malá exkurze do světa nelineárních PDR

1 Uvažujme nelineární rovnici

$$
(N1)\quad \boxed{\begin{aligned} \partial_t u + b\,\partial_x u &= u^2 && \text{v } (0,+\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,\cdot) &= u_0 && \text{v } \mathbb{R} \end{aligned}}
$$

Zkusme opět použít charakteristiky a uvažujme

$$
z(s) = u(s+\bar t,\; bs+\bar x)
$$

Pak

$$
\left[\begin{aligned} z'(s) &= z^2(s) \\ z(-\bar t) &= u_0(\bar x - b\bar t) \end{aligned}\right]
\qquad
\begin{aligned} -\left(z^{-1}(s)\right)' &= 1 \\ -\frac{1}{z(s)} + \frac{1}{z(-\bar t)} &= s+\bar t \\ [z(s)]^{-1} &= \frac{1-(s+\bar t)\,z(-\bar t)}{z(-\bar t)} \end{aligned}
$$

což implikuje

$$
z(s) = \frac{z(-\bar t)}{1-(s+\bar t)\,z(-\bar t)} \Rightarrow
$$

$$
u(\bar t,\bar x) = \frac{u_0(\bar x - b\bar t)}{1-\bar t\, u_0(\bar x - b\bar t)} \Rightarrow
$$

$$
(*)\quad \boxed{u(t,x) = \frac{u_0(x-bt)}{1-t\,u_0(x-bt)}}
$$

Vidíme, že $(*)$ má smysl pokud $1-t\,u_0(x-bt)>0$.
Tedy, úloha (N1) má jediné řešení definované na $[0,T_{max})$, kde $T_{max}=+\infty$ pokud $u_0\le 0$ všude v $\mathbb{R}$ a jinak

$$
T_{max} = \frac{1}{\sup_{y\in\mathbb{R}} u_0(y)}
$$

Navíc, ~~pokud~~ nastane druhý případ, tak

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}} u(t,x) \to +\infty \quad \text{pro } t\to T_{max}^- .
$$

Tomuto jevu se říká „blow up". Nelineární rovnice nemusí mít řešení na libovolném intervalu.

[2] Uvažujme počáteční úlohu pro Burgersovu rovnici

$$(B) \quad \left[\begin{array}{rl} \partial_t u + u\,\partial_x u = 0 & \text{v } (0,+\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{v } \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Poznámky (1) Všimněme si, že Burgersova rci lze psát ve tvaru „zákonu zachování" $\partial_t u + \partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$. Integrací přes $\mathbb{R}$ (respektive $(-R,R)$ a $R\to+\infty$), za podmínky $\lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0$, dostáváme tutiž

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx},$$

Q: Uměli byste ukázat, že platí $\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$?

což vyjadřuje neměnnost veličiny $\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx$ v čase.

(2) Burgersova rovnice je jednoduchá „nelineární" PDR, které je „součástí" mnoha systémů PDR mechaniky tekutin a pevných těles.

Řešitelnost (B) Pokud u je řešení (B), pak víme, že u je konstantní na charakteristikách, které jsou dány nyní komplikovanějším systémem ODR

$$(C) \quad \left[\begin{array}{lcl} t'(s) = 1 & & t(0) = t \\ x'(s) = u(s,x(s)) & a & x(0) = x \end{array}\right.$$

charakteristický systém závisí na (hledaném) řešení, je obtížné jej řešit. Přesto nám pomohou tyto úvahy:

- u je konstantní na charakteristikách daných (C)
- u udává v (C) směrnici tečny ke charakteristice resp. vektor $(1, u(s,x(s)))$

→ z těchto dvou pozorování plyne, že směrnice ke charakteristikám se nemění a směrnice jsou tedy přímky. Není těžké odvodit, že u daná vztahem

$$\boxed{u(t, x + u_0(x)t) = u_0(x)} \qquad (***)$$

řeší (B). OVĚŘTE!

Vstupně: $t(s) = s+t$
$x(s) = Cs + x$ a tedy $u(t,x) = u(t(s),x(s))\big|_{s=0}$

$= u(t(s),x(s))\big|_{s=-t}$

$= u(0, x-Ct)$

$= u_0(x-Ct)$

kde $C \overset{\text{např.}}{=} u(t(s),x(s))\big|_{s=-t} = u_0(x-Ct)$

Substitucí $y = x-Ct$ dostaneme z :

$$u(t, y+Ct) = u_0(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u(t, y+u_0(y)t) = u_0(y)}$$

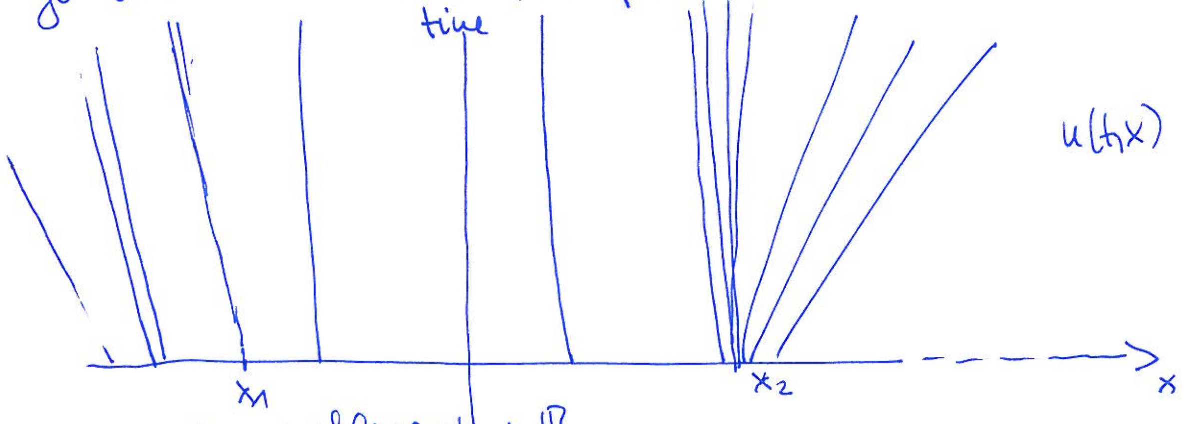
což je (***)

Lepší vhled získáme graficky: (jen $t \geq 0$)

- Je-li u_0 neklesající v $\mathbb{R}$, pak charakteristika (přímka) vycházející z x_1 má menší směrnici (rovnou $u_0(x_1)$) než charakteristika (přímka) vycházející z x_2, kde

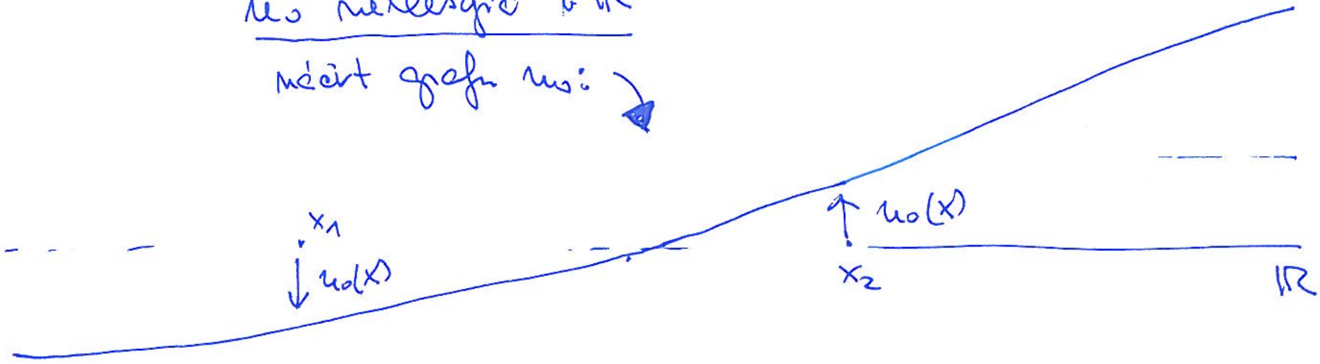
$x_1 < x_2$.

Charakteristiky se tedy neprotnou a hodnota řešení je dána hodnotou na počátku



u_0 neklesající v $\mathbb{R}$

náčrt grafu u_0:

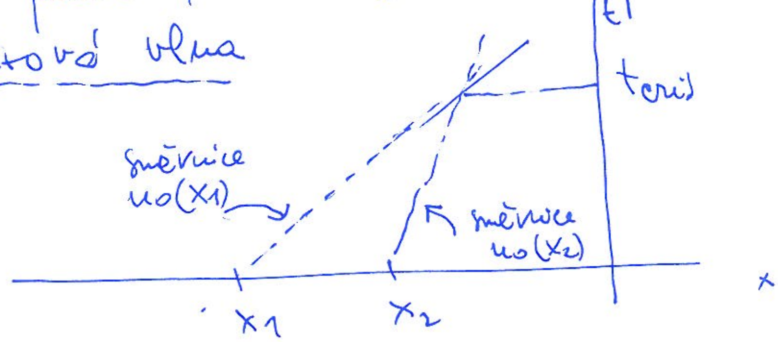


- Naopak, existují-li $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ tak, že $u_0(x_1) > u_0(x_2)$, pak se charakteristiky vycházející z x_1 a x_2 se směrnicemi $u_0(x_1)$ a $u_0(x_2)$ protnou v čase t_{krit}.

a klasické řešení nemůže existovat pro $t \geq t_{krit}$.

čv2/6

Vzniká rázová vlna



Jaké řešení nastane pro $t > t_{krit}$?