Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	6	6	8	8	8	36
Získáno						

[6] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1 \left([0,1] \right) \mid y(0) = 0,\ y(1) = 0 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_0^1 \left(y + yy' + y' + \frac{1}{2}(y')^2 \right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnici pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gâteaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nezáporná.

[6] 2. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2}.$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0, 1]$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J a K, kde

a) $J = (0, 1)$,

b) $K = (\alpha, 1)$, kde $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

[8] 3. Určete pro která $b \in \mathbb{R}$ je definována funkce

$$F(b) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-bx}}{x^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}x.$$

(Aneb zjistěte pro která $b \in \mathbb{R}$ uvedený integrál existuje a je konečný.) Pro tato b integrál spočtěte. *Postupy použité při řešení je nutné pečlivě zdůvodnit!*

Nápověda: $\int_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

[8] 4. Spočtěte plošný obsah plochy S, která je dána jako hranice (povrch) tělesa M, přičemž těleso M je popsáno vztahem $M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ \frac{x^2+y^2}{H} < z,\ 0 < z < H \right\}$. ($H \in \mathbb{R}^+$ je parametr.)

[8] 5. Uvažujte Hilbertův prostor $H =_{\mathrm{def}} L^2\left((0, 2\pi)\right)$ vybavený standardním skalárním součinem

$$(u, v)_{L^2((0,2\pi))} =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{2\pi} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Uvažujte podprostor V, $V \subset H$, který je generován jako lineární obal funkcí

$$g_1(x) =_{\mathrm{def}} \sin x + \cos x,$$
$$g_2(x) =_{\mathrm{def}} \cos x + \sin(3x),$$

aneb

$$V =_{\mathrm{def}} \{ w \in H \,|\, \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \colon w(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) \},$$

a dále uvažujte funkci $f_m \in H$ definovanou předpisem

$$f_m(x) =_{\mathrm{def}} \sin(mx),$$

kde $m \in \mathbb{N}_0$. (Množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$ pro tyto účely tohoto příkladu chápeme včetně nuly, k symbolu $\mathbb{N}$ tedy přidáváme index nula, aby nedošlo k mýlce.)

a) Zjistěte zda jsou funkce g_1 a g_2 na sebe v daném skalárním součinu kolmé. Spočtěte normy funkcí $\|g_1\|_H$ a $\|g_2\|_H$, kde $\|\cdot\|_H$ značí standardní normu v prostoru H. (Tedy normu indukovanou příslušným skalárním součinem.) Pokud na sebe funkce g_1 a g_2 kolmé nejsou, najděte v prostoru V ortonormální bázi, to jest bázi tvořenou funkcemi, jejichž norma je rovná jedné a které jsou na sebe navzájem kolmé.

b) Zjistěte, pro která $m \in \mathbb{N}_0$ je $f_m \in V$.

c) Pro dané $k \in \mathbb{N}_0$ najděte nejlepší aproximaci funkce $f_k \in H$ v podprostoru V, aneb najděte funkci $h_k \in V$ takovou, že platí $\|f_k - h_k\|_H = \min_{l \in V} \|f_k - l\|_H$, kde $\|\cdot\|_H$ značí standardní normu v prostoru H. (Tedy normu indukovanou příslušným skalárním součinem.)