Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Body	6	6	6	6	24
Získáno					

[6] 1. Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných spojitých funkcí definoványch na intervalu (a, b), kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Zadefinujte tyto pojmy

(i) $\{f_n\}$ konverguje bodově v (a, b).

(ii) $\{f_n\}$ konverguje skoro všude v (a, b).

(iii) $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně v (a, b).

(iv) $\{f_n\}$ konverguje v $(C((a, b)), \|\cdot\|_\infty)$, kde $\|f\|_\infty := \sup_{x\in(a,b)} |f(x)|$

(v) $\{f_n\}$ konverguje v $L^\infty((a, b))$.

1. Dokažte, že (iii) $\iff$ (iv).
2. Ukažte, že neplatí: (i) $\implies$ (iii).
3. Co říká Jegorova věta?.

[6] 2.

1. Zadefinujte pojmy: interval v $\mathbb{R}^d$; charakteristická funkce intervalu; schodovitá funkce.
2. Vysvětlete základní kroky konstrukce Lebesgueova integrálu (bez důkazu).
3. Zformulujte Fubiniho větu pro případ $\Omega = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s$.

[6] 3.

1. Zadefinujte plošný integrál druhého druhu $\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{dS}$ včetně přesných předpokladů na uvažovanou plochu S parametrizovanou zobrazením $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : (a, b) \times (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3$.
2. Vyjádřete plošný integrál druhého druhu pomocí plošného integrálu prvního druhu.
3. Zadefinujte pojem Gramova matice a vysvětlete, jak tento pojem souvisí s plošným integrálem prvního druhu.
4. Zformulujte Gauss-Ostrogradského větu a zadefinujte symboly, které se v popisu věty vyskytují.

[6] 4.

1. Uveďte definice pojmů *separabilní Hilbertův prostor* H.
2. Zadefinujte prostor ℓ_2 a dokažte, že je separabilní Hilbertův prostor.
3. Vysvětlete, zda (v jakém smyslu) je Lebesgueův prostor $L^2(\Omega)$ Hilbertův prostor.
4. Proč je každý separabilní Hilbertův prostor isometrický s prostorem ℓ_2?