

1

1.1 Zadání

Najděte gravitační potenciál homogenní kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ v bodě $P = (0, 0, z_0)$, tj. vypočítejte

$$U = G \int_S \frac{\varrho}{r} dS,$$

kde G je gravitační konstanta, ϱ je hustota, r je vzájemná vzdálenost pozorovatele (tj. bodu P) a bodu kulové plochy.

1.2 Řešení

Jedná se o křivkový integrál prvního druhu, tudíž budu postupovat následovně. Kulovou plochu popíšu pomocí (zjednodušených - poloměr není parametr) sférických souřadnic, tj. použiju parametrizaci

$$\varphi : (u, t) \rightarrow (a \cos u \cos t, a \sin u \cos t, a \sin t),$$

pro $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, $u \in [0, 2\pi]$. Parciální derivace podle jednotlivých parametrů jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= (-a \cos u \sin t, -a \sin u \sin t, a \cos t), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= (-a \sin u \cos t, a \cos u \cos t, 0). \end{aligned}$$

Jejich vektorový součin je pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= (a^2 \cos u \cos^2 t, -a^2 \sin u \cos^2 t, -a^2 \cos^2 u \sin t \cos t - a^2 \sin^2 u \sin t \cos t) \\ &= a^2 \cos t (\cos u \cos t, -\sin u \cos t, -\sin t) \end{aligned}$$

a nakonec jeho velikost je

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| = a^2 |\cos t| \sqrt{\cos^2 u \cos^2 t + \sin^2 u \cos^2 t + \sin^2 t} = a^2 \cos t.$$

Pod odmocninou se nachází pouze goniometrická jednička, kosinus je na $[-\pi/2, \pi/2]$ kladný, tudíž absolutní hodnota není třeba. V integrálu r (vzájemnou vzdálenost pozorovatele a bodu kulové plochy) zapíšu jako

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 u \cos^2 t + a^2 \sin^2 u \cos^2 t + (a \sin t - z_0)^2} = \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t - 2az_0 \sin t + z_0^2} = \sqrt{a^2 + z_0^2 - 2az_0 \sin t}. \end{aligned}$$

Dále využiji toho že $\varrho \neq \varrho(x, y, z)$, tedy hustotu můžu vytknout před integrál. Dohromady tak dostanu

$$\begin{aligned} U &= G\varrho \int \int \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| dt du = G\varrho \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a^2 \cos t}{\sqrt{a^2 + z_0^2 - 2az_0 \sin t}} dt du = \left\{ \begin{aligned} a^2 + z_0^2 - 2az_0 \sin t &= v \\ -2az_0 \cos t dt &= dv \end{aligned} \right\} = \\ &= -\frac{aG\varrho}{2z_0} \int_0^{2\pi} \int_{a^2+z_0^2-2az_0}^{a^2+z_0^2+2az_0} \frac{1}{\sqrt{v}} dv du = -\frac{aG\varrho}{2z_0} \int_0^{2\pi} [2\sqrt{v}]_{(a+z_0)^2}^{(a-z_0)^2} du = -\frac{2\pi aG\varrho}{z_0} [\sqrt{v}]_{(a+z_0)^2}^{(a-z_0)^2} \end{aligned}$$

Hodnota výrazu $\sqrt{(a - z_0)^2}$ je rovna $a - z_0$ pro $a \geq z_0$ a $z_0 - a$ pro $a < z_0$. Pro $a \geq z_0$ tak dostáváme

$$U = -\frac{2\pi aG\varrho}{z_0}(-2z_0) = 4\pi aG\varrho = G\frac{m}{a},$$

kde $m = \varrho S = 4\pi a^2 \varrho$, pro $a < z_0$ máme

$$U = -\frac{2\pi aG\varrho}{z_0}(-2a) = \frac{4\pi a^2 G\varrho}{z_0} = G\frac{m}{z_0}.$$

Potenciál je tak uvnitř kulové slupky konstantní, venku klesá úměrně převrácené vzdálenosti od středu.

2

2.1 Zadání

Najděte polohu těžiště části kužele

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

useknutého válcem $x^2 + y^2 = ax$

2.2 Řešení

Souřadnice těžiště vypočítám jako

$$x_t = \frac{1}{M} \int_S \varrho(x, y) x \, dS,$$

pro ostatní souřadnice obdobně. Jelikož není určeno jinak, předpokládáme plochu kužele homogenní, tj. $\varrho \neq \varrho(x, y, z)$, hustotu je tedy možné vytknout před integrál. M značí celkovou hmotnost zadané části kužele, pro kterou platí

$$M = \varrho \int_S 1 \, dS.$$

Při výpočtu využiji toho, že plocha je zadaná jako graf funkce $\varphi: (x, y) \rightarrow (x, y, z(x, y))$, a tedy platí

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}.$$

Jednotlivé parciální derivace jsou

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

a tedy

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

Hmotnost tedy můžu vypočítat jako

$$M = \varrho \int_{\circ} \sqrt{2} \, dx dy,$$

kde pomocí „ $\circ$ “ značím integraci přes kruh vzniklý projekcí zadaného válce do roviny $z = 0$. Tento kruh můžu jednoduše popsat pomocí parametrizace

$$\Psi: (r, \varphi) \rightarrow \left(\frac{a}{2} + r \cos \varphi, r \sin \varphi \right), \quad r \in \left[0, \frac{a}{2} \right], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

K provedení substituce budu potřebovat Jacobián tohoto zobrazení:

$$|\det \nabla \Psi| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = |r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi| = r$$

Integrál pro hmotnost tak můžu zapsat jako

$$M = \varrho \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} r \, dr \, d\varphi = 2\sqrt{2}\pi\varrho \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{\pi a^2 \varrho \sqrt{2}}{4}.$$

Výsledek je to očekávaný - samotný integrál byl pouze obsah kruhu o poloměru $a/2$, pouze přenásobený hustotou a faktorem $\sqrt{2}$ vzniklým projekcí plochy do roviny $z = 0$. Nyní můžu pokračovat výpočtem jednotlivých souřadnic. Opět plošný integrál nejprve převedu na integrál přes kruh $\circ$ a posléze využiji substituci Ψ . Dostanu tak

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{1}{M} \int_S \varrho(x, y) x \, dS = \frac{\varrho}{M} \int_{\circ} x \sqrt{2} \, dx dy = \frac{\varrho \sqrt{2}}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} + r \cos \varphi \right) r \, dr d\varphi = \\ &= \frac{\varrho \sqrt{2}}{M} \int_0^{2\pi} \left[\frac{ar^2}{4} + \frac{r^3}{3} \cos \varphi \right]_0^{\frac{a}{2}} d\varphi = \frac{\varrho \sqrt{2}}{M} \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{16} + \frac{a^3}{24} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{\varrho \sqrt{2}}{M} \left[\frac{a^3}{16} \varphi + \frac{a^3}{24} \sin \varphi \right]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{a^3 \pi \varrho \sqrt{2}}{8M} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

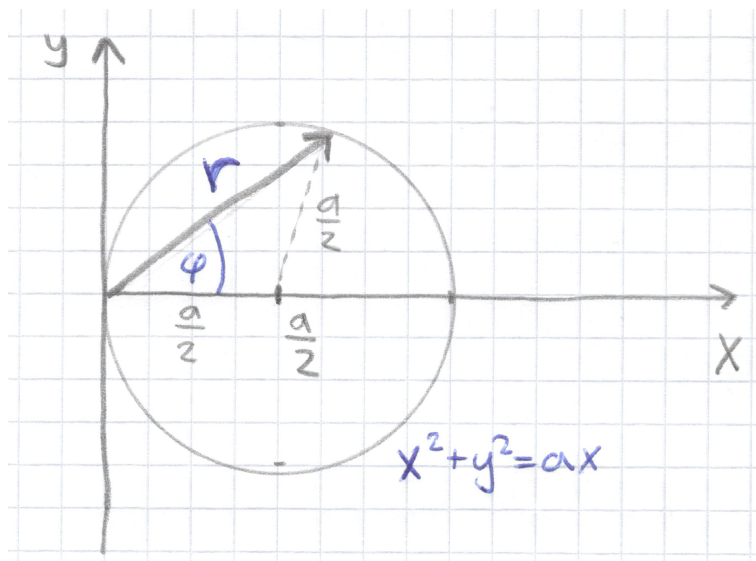
Pro y_t je postup obdobný,

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{M} \int_S \varrho(x,y)x \, dS = \frac{\varrho}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} y\sqrt{2} \, dx dy = \frac{\varrho\sqrt{2}}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} (r \sin \varphi) r \, dr d\varphi = \frac{\varrho\sqrt{2}}{M} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \sin \varphi \right]_0^{\frac{a}{2}} d\varphi = \\ &= \frac{\varrho\sqrt{2}}{M} \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{24} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{a^3 \varrho\sqrt{2}}{24M} [-\cos \varphi]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Pro případ z_t použiju úplně jinou parametrizaci. Místo válcových souřadnic se středem v $(a/2, 0)$ zvolím popis kuželové plochy pomocí parametrizace

$$\Omega : (\varphi, r) \rightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r).$$

V této parametrizaci bude sice náročnější najít integrační meze, avšak výpočet samotného integrálu bude jednodušší. Pro určení integračních mezí si pomůžu náčrtkem, zobrazujícím projekci situace do roviny $z = 0$. Jak



Obrázek 1: Náčrtek k určení integračních mezí

je vidět, úhel φ může nabývat hodnot v rozmezí $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Pro danou hodnotu φ pak lze r určit pomocí sinové věty, neboť musí platit

$$\frac{a/2}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sin(\pi - 2\varphi)} = \frac{r}{\sin 2\varphi} = \frac{r}{2 \sin \varphi \cos \varphi} \Rightarrow r = a \cos \varphi,$$

tedy $r \in (0, a \cos \varphi)$. K výpočtu potřebuji ještě vypočítat parciální derivace $\vec{\Omega}$ podle parametrů

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0), \quad \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 1),$$

a velikost vektorového součinu těchto parciálních derivací

$$\left| \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial r} \right| = |(r \cos \varphi, r \sin \varphi, -r \sin^2 \varphi - r \cos^2 \varphi)| = \sqrt{2}r^2 = r\sqrt{2}.$$

Poloha těžiště na ose z je tak

$$\begin{aligned} z_t &= \frac{\varrho}{M} \int_S z \, dS = \frac{\varrho}{M} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} r^2 \sqrt{2} \, dr d\varphi = \frac{\varrho}{M} \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{a \cos \varphi} d\varphi = \frac{\varrho}{M} \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3}{3} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{\varrho a^3 \sqrt{2}}{3M} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \, d\varphi = \left| \begin{array}{l} \sin \varphi = u \\ \cos \varphi d\varphi = du \end{array} \right| = \frac{\varrho a^3 \sqrt{2}}{3M} \int_{-1}^1 (1 - u^2) \, du = \frac{\varrho a^3 \sqrt{2}}{3M} \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{4\varrho a^3 \sqrt{2}}{9M} = \frac{16a}{9\pi}. \end{aligned}$$

Těžiště zadaného útvaru tedy má souřadnice

$$\vec{r}_T = \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{16a}{9\pi} \right).$$

3

3.1 Zadání

Vypočítejte polární moment setrvačnosti

$$I = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dS$$

celého povrchu válce $x^2 + y^2 \leq r^2$; $0 \leq z \leq H$.

3.2 Řešení

Díky linearitě integrálu můžu I rozdělit na integrál přes plášť a integrály přes podstavy,

$$I = \int_{\text{pl}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dS + \int_{\text{o}, z=0} (x^2 + y^2 + z^2) \, dS + \int_{\text{o}, z=H} (x^2 + y^2 + z^2) \, dS.$$

Zavedu zobrazení $\vec{\Psi} : (\varphi, z) \rightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$, popisující pro hodnoty parametrů $\varphi \in (0, 2\pi)$, $z \in (0, H)$ dobře plochu pláště válce a zobrazení $\vec{\Omega} : (\varphi, t) \rightarrow (t \cos \varphi, t \sin \varphi, z_0)$, které naopak pro hodnoty parametrů $\varphi \in (0, 2\pi)$, $t \in (0, r)$ dobře popisuje podstavy. Parciální derivace těchto zobrazení podle parametrů jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \varphi} &= (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0), \quad \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial z} = (0, 0, 1), \\ \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \varphi} &= (-t \sin \varphi, t \cos \varphi, 0), \quad \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \end{aligned}$$

a velikost skalárního součinu těchto parciálních derivací pak je

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial z} \right| &= |(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)| = r, \\ \left| \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} \right| &= |(0, 0, -t \sin^2 \varphi - t \cos^2 \varphi)| = t. \end{aligned}$$

Po dosazení $\vec{\Psi}$ do integrálu přes plášť a $\vec{\Omega}$ do integrálů přes podstavy tak dostanu

$$\begin{aligned} I &= \int_0^H \int_0^{2\pi} r (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + z^2) \, d\varphi \, dz + \int_0^r \int_0^{2\pi} t (t^2 \cos^2 \varphi + t^2 \sin^2 \varphi + z_0^2) \big|_{z_0=0} \, d\varphi \, dt + \\ &\quad + \int_0^r \int_0^{2\pi} t (t^2 \cos^2 \varphi + t^2 \sin^2 \varphi + z_0^2) \big|_{z_0=H} \, d\varphi \, dt \end{aligned}$$

Díky goniometrické jedničce ze všech výrazů vypadne φ , integrály přes φ jsou tedy triviální

$$\begin{aligned} I &= 2\pi r \int_0^H (r^2 + z^2) \, dz + 2\pi \int_0^r t^3 \, dt + 2\pi \int_0^r t (t^2 + H^2) \, dt \\ I &= 2\pi \left(r \left[r^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_0^H + \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^r + \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} H^2 \right]_0^r \right) \\ I &= 2\pi \left(r^3 H + \frac{r}{3} H^3 + \frac{r^4}{4} + \frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} H^2 \right) = 2\pi r \left(\frac{r^3}{2} + r^2 H + \frac{r}{2} H^2 + \frac{1}{3} H^3 \right) \end{aligned}$$