L1. Základní PDR a základní okrajové a počáteční úlohy

V kursu se zaměříme na oblast řešení úloh souvisejících s následujícími diferenciálními operátory

(1) $\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}$ či obecněji $\frac{\partial}{\partial t} + \vec{b}\cdot\nabla$ — transportní operátor

(2) $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ či obecněji $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta$ — vlnový operátor

(3) $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ či obecněji $\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta$ — operátor vedení tepla či tepelný operátor

(4) $-\Delta$ — Laplaceův operátor

(5) $\frac{\partial}{\partial t} - ik\Delta$ — Schrödingerův operátor [kvantová mechanika]

Všechny tyto operátory jsou speciální typy operátorů

$$(*) \qquad L = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha \qquad \text{kde } a_\alpha \in \mathbb{C} \text{ (či } \mathbb{R}) \text{ jsou koeficienty (zde konstantní)}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d), \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d, \quad D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Připomeňme, že operátory jsou zobrazení z prostoru funkcí do prostoru funkcí (či obecněji z prostoru funkcionálů do prostoru funkcionálů).

Operátory typu (*) jsou lineární diferenciální operátory nejvýše k-tého řádu

- lineární neboť
$$L(u_1+u_2) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha(u_1+u_2) = \sum_{|\alpha|\le k} (a_\alpha D^\alpha u_1 + a_\alpha D^\alpha u_2)$$
$$= \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha u_1 + \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha u_2$$
$$= Lu_1 + Lu_2$$
a
$$L(\gamma u) = \gamma L u \qquad \text{pro } \gamma \in \mathbb{R} \text{ (či } \mathbb{C})$$

- diferenciální neboť obsahuje parciální derivace (pokud $d \ge 2$) či obyčejné derivace ($d=1$)

Příklady:

(i) $\underline{a_m y^{(m)} + \dots + a_1 y' + a_0 y}$ je obyčejný diferenciální operátor aplikovaný na $y : (a,b) \to \mathbb{R}$

m-tého řádu pokud $a_m \neq 0$.

$\underline{a_m y^{(m)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f}$ je ODR m-tého řádu s danou pravou stranou f.

(ii) Příklady (2)-(5) výše jsou parciální diferenciální operátory 2. řádu

(W) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon^2 \Delta u = f$ je vlnová rce

(Q) $\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u = f$ je rce vedení tepla

(S) $\frac{\partial u}{\partial t} - i\varepsilon \Delta u = f$ je Schrödingerova rovnice

(P) $-\Delta u = f$ je Poissonova rovnice (Laplaceova rovnice pokud $f=0$)

(iii) $\frac{\partial}{\partial t} + \vec{b} \cdot \nabla$ je transportní operátor pro $\vec{b} \in \mathbb{R}^d$ dané

(T) $\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{b} \cdot \nabla u = g$ je rovnice transportu (s daným g)

(iv) $\Delta^{(2)} u := \Delta(\Delta u)$ je biharmonický operátor aplikovaný na u

je to PD operátor 4. řádu.

Pro $d=2$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

$$\Delta^{(2)} u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}$$

Lineární parciální dif. rovnice (či operátory) se dají klasifikovat a rozlišují se rovnice eliptické (příklady jsou $-\Delta u = f$, $\Delta^{(2)} u = f$), parabolické (příkladem je rovnice vedení tepla) a hyperbolické (příkladem je vlnová rovnice).

Rovnice (W), (Q), (S) a (T) jsou evoluční rovnice;
Rovnice (L) a rovnice $\Delta^{(2)} u = f$ jsou stacionární rovnice.

+ Výhodou stacionárních rovnic je, že nemáme časovou proměnnou, a tak je úloha jednodušší (redukce dimenze)
− Nevýhodou stacionárních úloh je, že nemáme časovou proměnnou, a tak chybí informace jak jsme se do stacionárního stavu dostali.

Pokud nepředepíšu u stacionárních úloh okrajové podmínky a u evolučních úloh počáteční podmínky (a okrajové podmínky) pak nelze čekat, že budu schopen specifikovat řešení úlohy, které bude jediné.

Mohu si položit otázku, zda jsem schopen nalézt všechna řešení rovnice $Lu = f$, kde L je nějaký lineární diferenciální operátor. K této otázce, řešené v celém $\mathbb{R}^d$, se vrátíme za chvíli.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Okrajová úloha pro Poissonovu rovnici má tvar:
(BVP = boundary value problem)

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u = f & v\ \Omega \\ u = u_D & na\ \Gamma_D \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} := \nabla u \cdot \vec{n} = g & na\ \Gamma_N \end{cases}}$$

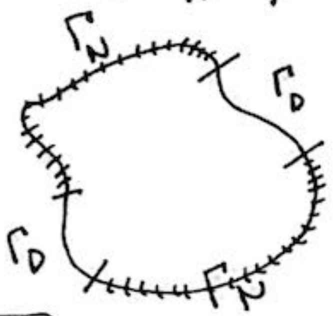
Dirichlet ---→ $u = u_D$ na Γ_D

Neumann ---→ $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} := \nabla u \cdot \vec{n} = g$ na Γ_N

kde $\overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N} = \partial\Omega$

$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$

$\Gamma_D, \Gamma_N \subset \partial\Omega$



Existují ještě (např.) Newtonovy okrajové podmínky

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial n} = u - u_N \quad \text{na části hranice}}$$

Funkce $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $u_D: \Gamma_D \to \mathbb{R}$, $g: \Gamma_N \to \mathbb{R}$, u_N: část $\partial\Omega \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce

Hledáme $u: \Omega \to \mathbb{R}$ tak, že (Ú) je splněna v nějakém smyslu.

Je-li $\Gamma_N = \partial\Omega$, pak f a g musí splňovat $\boxed{\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,dS = 0}$ PROČ?

U evolučních rovnic (Q), (W), (S), (T) řešíme buď Cauchyho (nebo počáteční) úlohu, kdy $\boxed{\Omega = \mathbb{R}^d}$ a předepisujeme počáteční podmínky

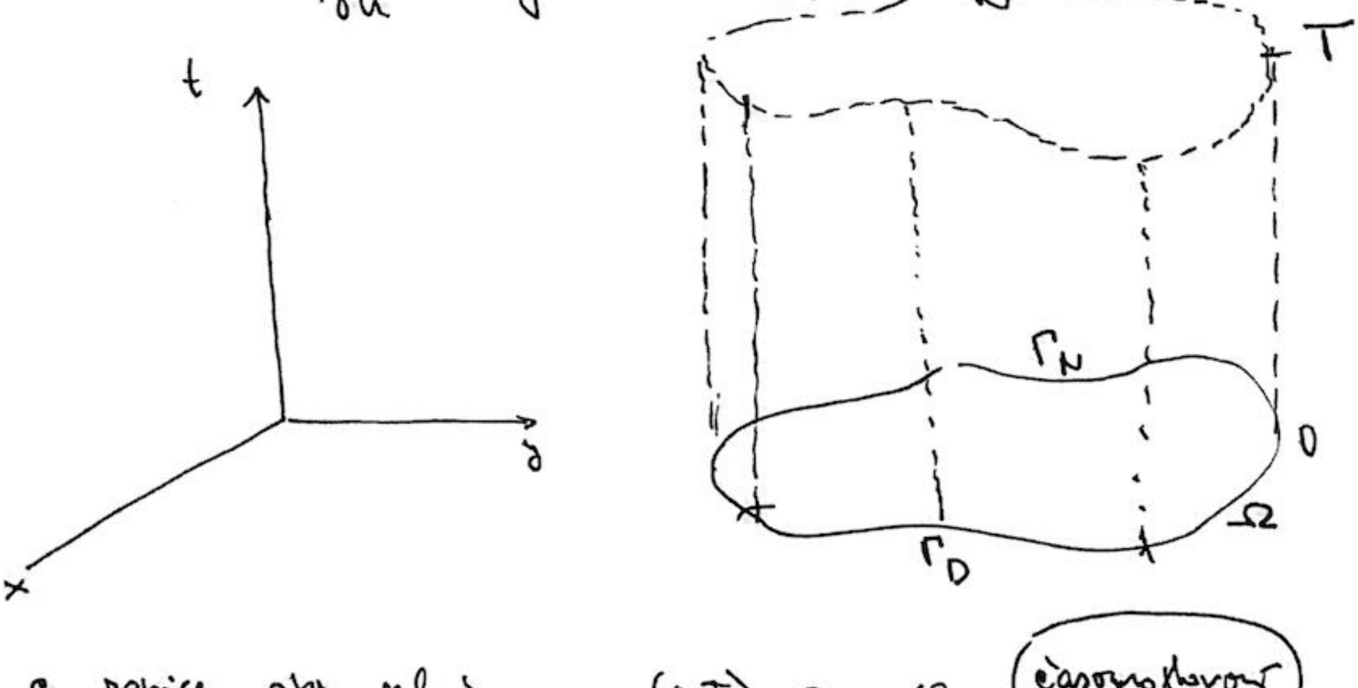
$$(P_0) \qquad \boxed{u(0,\cdot) = u_0 \quad \text{v } \mathbb{R}^d}$$

U vlnové rovnice (W) navíc předepisujeme

$$(P_1) \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1 \quad \text{v } \mathbb{R}^d}.$$

nebo řešíme počáteční a okrajovou úlohu (IBVP = initial boundary value problem), kdy znovu (P_0) uvažované v Ω (a (P_1) uvaž. v Ω navíc u vlnové rovnice) u musí splňovat

$$u = u_D \quad \text{na } (0,T)\times\Gamma_D,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{na } (0,T)\times\Gamma_N;$$



a rovnice pak splňuje v $(0,T)\times\Omega =: Q_T$ (časoprostorový válec)

U evolučních úloh:

data: • $u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ (u₁ je jen u vlnové rovnice)

• $f : (0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$

• $g : (0,T)\times\Gamma_N \to \mathbb{R}$

• $u_D : (0,T)\times\Gamma_D \to \mathbb{R}$

hledáme • $u : (0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$ řešení.