

Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 8

Totální diferenciál, lokální a vázané extrémy funkcí více proměnných

1. U následujících funkcí zjistěte, ve kterých bodech existuje totální diferenciál (a určete ho).

(i) $f(x, y, z) = \cos x \cosh y$

(ii) $f(x, y) = |x||y|$

(iii) $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$

Řešení:

(i) Zřejmě platí $D_f = \mathbb{R}^3$. Na celém definičním oboru existují parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\sin x \cosh y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \cos x \sinh y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0,$$

kteřé jsou zde navíc spojité. Funkce f má tedy totální diferenciál na celém $\mathbb{R}^3$, který je pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ dán předpisem

$$df(x, y, z)(\mathbf{h}) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{h} = -(\sin x \cosh y)h_1 + (\cos x \sinh y)h_2.$$

(ii) Zřejmě platí $D_f = \mathbb{R}^2$. Mimo osový kříž, tj. pro $xy \neq 0$, platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (\operatorname{sign} x)|y|,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (\operatorname{sign} y)|x|.$$

Protože jsou zde parciální derivace spojité, funkce f má mimo osový kříž totální diferenciál.

Na osovém kříži mimo počátek, tj. na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0, (x, y) \neq (0, 0)\}$, vždy jedna z parciálních derivací neexistuje. Skutečně, pro $y \neq 0$ máme podle definice

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h||y| - 0|y|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (\operatorname{sign} h)|y|,$$

a parciální derivace f podle x zde tedy neexistuje. Analogicky postupujeme na ose x mimo počátek, kde neexistuje parciální derivace f podle y .

V počátku podle definice parciální derivace platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

a tedy, pokud zde funkce f má totální diferenciál, musí se jednat o nulové zobrazení. Ověříme, zda platí

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - 0}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

To je ovšem jednoduchý důsledek nerovností

$$0 \leq \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - 0}{\|\mathbf{h}\|_\infty} = \frac{|h_1||h_2|}{\max(|h_1|, |h_2|)} = \min(|h_1|, |h_2|) \leq \max(|h_1|, |h_2|) = \|\mathbf{h}\|_\infty,$$

kde jsme použili maximovou normu. (Na konečně dimenzionálním prostoru jsou všechny normy ekvivalentní, takže je jedno, kterou zvolíme v definici totálního diferenciálu.)

Konečně tedy dostáváme, že na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0 \vee (x, y) = (0, 0)\}$ má funkce totální diferenciál daný pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ předpisem

$$df(x, y, z)(\mathbf{h}) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{h} = (\operatorname{sign} x)|y|h_1 + (\operatorname{sign} y)|x|h_2.$$

(iii) Pro definiční obor zadané funkce platí

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0 \wedge (x > 0 \vee (x = 0 \wedge yz > 0))\}$$

Na množině $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0, x > 0\}$ máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{y}{xz} x^{\frac{y}{z}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\ln x}{z} x^{\frac{y}{z}}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -\frac{y \ln x}{z^2} x^{\frac{y}{z}},\end{aligned}$$

a ze spojitosti příslušných parciálních derivací zde proto dostáváme existenci totálního diferenciálu.

Na množině $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0, x = 0, yz > 0\}$ neexistuje parciální derivace f podle x (funkce není definovaná pro $x < 0$), a proto zde nemůže mít ani totální diferenciál.

Funkce f má tedy totální diferenciál na množině $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0, x > 0\}$, který je pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ dán předpisem

$$df(x, y, z)(\mathbf{h}) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{h} = x^{\frac{y}{z}} \left(\frac{y}{xz} h_1 + \frac{\ln x}{z} h_2 - \frac{y \ln x}{z^2} h_3 \right).$$

2. Najděte lokální extrémy následujících funkcí.

(i) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$

(ii) $f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(iii) $f(x, y) = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

Řešení:

(i) Všimněme si, že použití polárních souřadnic vede na zkoumání lokálních extrémů funkce

$$g(r) \stackrel{\text{def}}{=} r^2 e^{-r^2},$$

kde $r \in (0, +\infty)$. Protože g je funkcí jedné reálné proměnné, stačí použít nástroje známé ze zimního semestru. Platí

$$\frac{dg}{dr}(r) = 2r(1 - r^2)e^{-r^2},$$

a tedy ze znaménka první derivace dostáváme, že g je rostoucí pro $r \in (0, 1)$ a klesající pro $r \in (1, +\infty)$. V bodě $r = 1$ je tedy lokální maximum funkce g , z čehož plyne, že funkce f má lokální maxima na jednotkové kružnici, tj. na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Navíc vidíme, že v počátku má funkce f lokální minimum.

(ii) Mimo bod $(0, 0)$ se jedná o nekonečněkrát diferencovatelnou funkci. Dále okamžitě vidíme, že $(0, 0)$ není lokální extrém, neboť

$$\begin{aligned}f(x, x) &= x^2 \ln(2x^2) < 0, & x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ f(x, -x) &= -x^2 \ln(2x^2) > 0, & x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Jedná se tedy o tzv. sedlový bod.

Mimo počátek hledáme stacionární body, tj. body, které řeší rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \ln(x^2 + y^2) + xy \frac{2x}{x^2 + y^2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \ln(x^2 + y^2) + xy \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0.\end{aligned}$$

Je-li $y = 0$, pak první rovnice se nuluje a v druhé zbyde $x \ln x^2 = 0$. Dostáváme stacionární body $(\pm 1, 0)$. Analogicky pro $x = 0$, dostaneme podezřelé body $(0, \pm 1)$. Všechny tyto body můžeme ale rovnou vyloučit, neboť $f(1, 0) = 0$ a $f(1, y) > 0$ pro $y > 0$ a $f(1, y) < 0$ pro $y < 0$. Analogicky pro ostatní body $(-1, 0)$ a $(0, \pm 1)$.

Je-li $xy \neq 0$, pak můžeme vydělit první rovnici y , druhou x a dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} &= 0, \\ \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} &= 0.\end{aligned}$$

Tudíž

$$\frac{2x^2}{x^2 + y^2} = \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Je-li $x = \pm y$, pak

$$0 = \ln(2x^2) + \frac{2x^2}{2x^2} = \ln(2x^2) + 1,$$

a tedy dostáváme 4 stacionární body

$$\left(\pm \sqrt{\frac{1}{2e}}, \pm \sqrt{\frac{1}{2e}} \right).$$

Všimněme si, že platí následující symetrie

$$f(x, y) = f(-x, -y) = -f(x, -y) = f(-x, y).$$

Odsud plyne, že stačí zkoumat chování funkce f v bodě $\left(\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}} \right)$. Protože

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{2xy(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{2xy(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \ln(x^2 + y^2) + \frac{2(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2},\end{aligned}$$

dostáváme, že v bodě $(x, y) = \left(\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}} \right)$ je Hessova matice $\mathbb{H}_f$ rovna

$$\mathbb{H}_f \left(\left(\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}} \right) \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jedná se evidentně o pozitivně definitní matici a tedy f má v bodě $\left(\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}} \right)$ lokální minimum. To samé pak platí i pro bod $\left(-\sqrt{\frac{1}{2e}}, -\sqrt{\frac{1}{2e}} \right)$. Naopak body $\pm \left(\sqrt{\frac{1}{2e}}, -\sqrt{\frac{1}{2e}} \right)$ jsou lokální maxima.

(iii) Zřejmě platí $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Na D_f máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{x^2 + y^2 + x - 3y}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-2x^2 - 2y^2 + y + 3x}{x^2 + y^2},\end{aligned}$$

a stacionární body tedy dostaneme vyřešením rovnic

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + x - 3y &= 0, \\ -2x^2 - 2y^2 + y + 3x &= 0.\end{aligned}$$

Vynásobením první rovnice 2 a následným sečtením s druhou rovnicí dostáváme podmínku $x = y$. Po dosazení do první rovnice pak dostáváme

$$2x^2 - 2x = 0 \iff x = 0 \vee x = 1.$$

Řešením soustavy výše jsou tak body $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Počátek ale můžeme rovnou vyloučit, protože v něm není funkce f definována.

Pro druhé partiální derivace f platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-x^2 + 6xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{x^2 - 6xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{-3x^2 - 2xy + 3y^2}{(x^2 + y^2)^2},\end{aligned}$$

a Hessova matice $\mathbb{H}_f$ je proto v bodě $(1, 1)$ rovna

$$\mathbb{H}_f((1, 1)) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Protože $\det \mathbb{H}_f((1, 1)) = -\frac{9}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{2} < 0$, je matice indefinitní a v bodě $(1, 1)$ je tedy sedlový bod. (Determinant matice je roven součinu jejích vlastních čísel, což v našem případě znamená, že $\det \mathbb{H}_f((1, 1))$ má dvě nenulová vlastní čísla s opačnými znaménky.)

3. Najděte extrémy daných funkcí vzhledem k příslušné vazbě.

(i) $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}; \quad x^2 + y^2 = 1$

(ii) $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z; \quad x + y + z = \frac{\pi}{2}, \quad x, y, z > 0$

Řešení:

- (i) Jednotková kružnice $K := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ je kompaktní. Dále funkce f je spojitá a nabývá tedy na K svého maxima i minima. Položme $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Nyní spočteme gradienty

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right), \quad \nabla g(x, y) = (2x, 2y).$$

Podle věty o Lagrangeových multiplikátorech musí v bodě extrému $(x_0, y_0) \in K$ platit

$$(\nabla f)(x_0, y_0) = \lambda (\nabla g)(x_0, y_0)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. To vede na soustavu lineárních rovnic:

$$2\lambda x_0 = \frac{1}{a}, \quad 2\lambda y_0 = \frac{1}{b}.$$

Vidíme, že nutně $x_0 \neq 0$ a $y_0 \neq 0$. Z první rovnice tedy plyne $\lambda = \frac{1}{2ax_0}$ a dosazením do druhé rovnice dostaneme:

$$y_0 = \frac{1}{2\lambda b} = \frac{2ax_0}{2b} = \frac{ax_0}{b}.$$

Dále musí platit $x_0^2 + y_0^2 = 1$ a tedy

$$1 = x_0^2 + \left(\frac{ax_0}{b} \right)^2 = x_0^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) = \frac{x_0^2}{b^2} (a^2 + b^2) \Leftrightarrow x_0 = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Označme

$$A := \operatorname{sign}(ab) \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Pak

$$\begin{aligned} f(\pm A) &= \frac{\operatorname{sign}(ab)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{\pm b}{a} + \frac{\pm a}{b} \right) \\ &= \frac{\operatorname{sign}(ab)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{\pm(b^2 + a^2)}{ab} \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{\pm 1}{|ab|} \right). \end{aligned}$$

Závěr: f nabývá globálního maxima v bodě A a globálního minima v bodě $-A$.

(ii) Funkce f má zřejmě následující symetrie:

$$f(x, y, z) = f(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) = f(x + 2k_1\pi, y + 2k_2\pi, z + 2k_3\pi),$$

kde σ je libovolná permutace na třech prvcích a $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, 3$. Dále na množině

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = \frac{\pi}{2}, x, y, z > 0\}$$

platí $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$. Tudíž $0 < f(x, y, z) < 1$.

Množina M není kompaktní, neboť není uzavřená. Nicméně

$$\overline{M} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = \frac{\pi}{2}, x, y, z \geq 0\}$$

je kompaktní množina s hranicí

$$\partial M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = \frac{\pi}{2}, xyz = 0, x, y, z \geq 0\}.$$

Nejprve najdeme globální extrémy f na $\overline{M}$. Vidíme, že $f = 0$ na ∂M a $0 \leq f(x, y, z) \leq 1$ na $\overline{M}$. Jelikož $f > 0$ na M , pak nutně $0 = \inf_M f$ a tedy f na M nenabývá globálního minima. Zbývá najít bod z $\overline{M}$, kde f nabývá globálního maxima. Jelikož $f > 0$ na M a $f = 0$ na ∂M , pak globální maximum musí ležet v M .

Položme $g(x, y, z) = x + y + z - \frac{\pi}{2}$. Máme:

$$\nabla f = (\cos x \sin y \sin z, \sin x \cos y \sin z, \sin x \sin y \cos z), \quad \nabla g = (1, 1, 1).$$

V bodě globálního extrému (x, y, z) tedy musí platit

$$\begin{aligned} \cos x \sin y \sin z &= \lambda, \\ \sin x \cos y \sin z &= \lambda, \\ \sin x \sin y \cos z &= \lambda, \end{aligned}$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Víme, že pro $(x, y, z) \in M$ musí být výrazy

$$\sin x, \sin y, \sin z, \cos x, \cos y, \cos z$$

kladné. Z první a druhé rovnice dostaneme

$$\cos x \sin y = \sin x \cos y \Leftrightarrow \sin(x - y) = 0 \Leftrightarrow y - x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Z první a třetí rovnice dostaneme analogickým postupem $z - x = \ell\pi$, $\ell \in \mathbb{Z}$, a konečně z druhé a třetí rovnice plyne $z - y = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Celkem máme, že

$$y = x + k\pi, \quad z = x + \ell\pi, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Jelikož $\frac{\pi}{2} \geq x, y, z \geq 0$ na $\overline{M}$, pak nutně $x = y = z = \frac{\pi}{6}$. Více podezřelých bodů jsme nenašli, to znamená, že $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ je bod maxima. Konečně $f((\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})) = (\sin \frac{\pi}{6})^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

4. Nalezněte největší a nejmenší hodnotu daných funkcí na příslušné množině.

(i) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y; \quad x^2 + y^2 \leq 25$

(ii) $f(x, y, z) = x + y + z; \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

Řešení:

(i) Množina

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$$

je omezená a uzavřená. Jedná se tedy o kompaktní množinu. Zřejmě platí

$$K^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 25\}, \quad \partial K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}.$$

Funkce f je spojitá na K a nabývá tudíž na K svého maxima i minima. Nejprve najdeme podezřelé body uvnitř K , tj. na K° .

Spočteme gradient

$$\nabla f(x, y) = (2x - 12, 2y + 16).$$

Vidíme, že $\nabla f = (0, 0)$ jen v bodě $(6, 8)$. Tento bod ale neleží v K° . To znamená, že f musí nabývat maxima a minima na hranici ∂K .

Platí

$$\partial K := \{(x, y) : g(x, y) = 0\}, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 25, \quad \nabla g(x, y) = (2x, 2y).$$

Podle Lagrangeovy věty o vazáných extrémech musí v bodě extrému $(x_0, y_0) \in \partial K$ platit:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

To vede na soustavu rovnic

$$2x - 12 = 2\lambda x, \quad 2y + 16 = 2\lambda y.$$

Z první rovnice dostaneme $x \neq 0$ a $\lambda = \frac{x-6}{x} = 1 - \frac{6}{x}$. Dosadíme do druhé rovnice a získáme

$$y + 8 = y - \frac{6y}{x} \Leftrightarrow 8x = -6y \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x.$$

Tento vztah dosadíme do vazby a dostaneme

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = \frac{25}{9}x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 3, \quad y = \mp 4.$$

Konečně

$$f(3, -4) = -75, \quad f(-3, 4) = 125.$$

Závěr: f nabývá maxima v bodě $(-3, 4)$ a minima v bodě $(3, -4)$.

(ii) Množina

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

je omezená a uzavřená. Je tedy kompaktní. Dále platí

$$K^\circ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}, \\ \partial K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z = 1 \vee x^2 + y^2 = z \leq 1\}.$$

Funkce f je spojitá na K a nabývá tudíž na K svého maxima i minima.

Nejprve najdeme podezřelé body uvnitř K , tj. na K° . Platí

$$\nabla f = (1, 1, 1).$$

Jelikož $\nabla f \neq (0, 0, 0)$ na $\mathbb{R}^3$, pak v K° neleží žádný podezřelý bod. Stačí tedy hledat extrémy na ∂K .

Hranici ∂K rozdělíme ještě na dvě části, a to na

$$\partial K_0 = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{a} \quad \partial K_1 = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Pak platí $\partial K = \partial K_0 \cup \partial K_1$ a obě množiny ∂K_0 , ∂K_1 jsou kompaktní. Nejprve najdeme extrémy f na ∂K_0 a pak na ∂K_1 . Pak tyto extrémy mezi sebou porovnáme. Ještě si všimneme, že

$$\partial K_0 \cap \partial K_1 = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} \quad (1)$$

je kružnice v $\mathbb{R}^3$.

Nyní najdeme extrémy f na ∂K_0 . Definujme pomocnou funkci

$$g_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_0(x, y, z) = z - x^2 - y^2.$$

Jestliže extrém leží na podmnožině

$$H_0 := \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_0(x, y, z) = 0, x^2 + y^2 < 1\},$$

pak v takovém bodě musí platit:

$$\nabla f = \lambda \nabla g_0 = \lambda(-2x, -2y, 1).$$

To vede na soustavu rovnic

$$1 = -2\lambda x = -2\lambda y = \lambda.$$

Máme $\lambda = 1$, $x = y = -\frac{1}{2}$ a získali jsme podezřelý bod $A = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \partial K_0$. Ostatní podezřelé body na ∂K_0 musí ležet na kružnici (1) a tyto body najdeme později.

Analogicky postupujeme na ∂K_1 . Definujme pomocnou funkci

$$g_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_1(x, y, z) = z - 1.$$

Jestliže extrém leží na podmnožině

$$H_1 := \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y, z) = 0, x^2 + y^2 < 1\},$$

pak v takovém bodě musí platit:

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 = \lambda(0, 0, 1).$$

Dostáváme soustavu rovnic $1 = 0$, $1 = \lambda$, která nemá řešení. To znamená, že na H_1 žádný podezřelý bod není. Zbývá najít podezřelé body na kružnici (1) a porovnat hodnoty v těchto bodech s $f(A)$.

Máme

$$\partial K_0 \cap \partial K_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_0(x, y, z) = g_1(x, y, z) = 0\}.$$

V bodě extrému na této množině musí platit

$$\nabla f = \lambda_0 \nabla g_0 + \lambda_1 \nabla g_1, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1.$$

To vede na soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2x & 0 & 1 \\ -2y & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

pro neznámé λ_0 a λ_1 . Tato soustava má řešení jen pro $x = y$. Jelikož musí platit $x^2 + y^2 = 1$, pak $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Celkem existují pouze tři podezřelé body:

$$A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \pm B = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Platí

$$f(A) = -\frac{1}{2}, \quad f(\pm B) = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Jelikož $-\frac{1}{2} < 1 - \sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$, pak jsme ukázali

Závěr: f nabývá maxima v bodě B a minima v bodě A .