

Matematická analýza II (NOFY152) – DÚ 7

Topologické pojmy v $\mathbb{R}^d$, funkce více proměnných

1. Najděte vnitřek, uzávěr a hranici množiny $A \stackrel{\text{def}}{=} M \setminus K$, kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, 0 < y \leq 2\},$$
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1\}.$$

2. Pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ platí, že počátek leží v uzávěru množiny

$$\{(k^\alpha \cos k, k^\alpha \sin k) \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}?$$

Zdůvodněte.

3. Je množina

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 > 1, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

omezená? Zdůvodněte.

4. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Rozhodněte, zda platí následující rovnosti nebo alespoň jedna inkluze, tj. dokažte nebo najděte protipříklady,

(i) $\overline{\partial A} = \partial \overline{A}$

(ii) $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$

(iii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

5. Spočítejte limity (pokud existují)

(i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2 + xy}{|x| + |y|},$

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\cos(x + y))^{\frac{1}{x^2 + y^2}}.$

6. Jestliže dodefinujeme funkce z předchozího příkladu v počátku nulou, rozhodněte, zda jsou takto definované funkce spojité nebo omezené na nějakém okolí počátku.

7. Určete definiční obor následujících funkcí a spočítejte jejich první parciální derivace

(i) $f(x, y, z) = \cos(x + y) \sin(x - y + z),$

(ii) $f(x, y) = e^{\text{tg}(xy)}.$

8. Najděte směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 2x^2y + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

v počátku v obecném směru $(u, v) \in \mathbb{R}^2, u^2 + v^2 = 1$.