Termín pro odevzdání: čtvrtek 11. března 2021

1. Uvažujte stereografickou projekci tak, jak byla zavedena na cvičení/přednášce. Ukažte, že pokud je dáno číslo v komplexní rovině $w = u + \mathrm{i}v$, pak odpovídající bod $\boldsymbol{x}$ na sféře o poloměru R je určen jako

$$x = u\frac{2R^2}{u^2+v^2+R^2},$$
$$y = v\frac{2R^2}{u^2+v^2+R^2},$$
$$z = R\frac{u^2+v^2-R^2}{u^2+v^2+R^2}.$$

Řešení:

Z cvičení známe dopředné vzorce, aneb umíme vyjádřit u a v jako funkce x a y,

$$u = R\frac{x}{R-z},$$
$$v = R\frac{y}{R-z},$$

a navíc ještě víme, že bod se souřadnicemi x, y a z leží na sféře o poloměru R, což znamená, že $x^2+y^2+z^2 = R^2$. Manipulací se vzorci pro u a v získáme

$$u^2+v^2 = R^2\frac{R+z}{R-z},$$

odkud již snadno zjistíme, že

$$z = R\frac{u^2+v^2-R^2}{u^2+v^2+R^2}.$$

Tento vzorec následně využijeme ve vztahu pro u. Jest

$$x = u\frac{R-z}{R} = u\left(1-\frac{u^2+v^2-R^2}{u^2+v^2+R^2}\right) = u\frac{2R^2}{u^2+v^2+R^2}.$$

2. Budiž dána dvě komplexní čísla $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ a $z = x + \mathrm{i}y$, pro která platí

$$\alpha + \mathrm{i}\beta = \ln\frac{y+\mathrm{i}\,(x+a)}{y+\mathrm{i}\,(x-a)}. \tag{1}$$

Ukažte, že pro reálnou a imaginární část z platí

$$x = \frac{a\sinh\alpha}{\cosh\alpha-\cos\beta}, \quad y = \frac{a\sin\beta}{\cosh\alpha-\cos\beta}.$$

(Vztah (1) je definiční vztah pro takzvané bipolární souřadnice v rovině.)

Řešení:

Požadovaný výsledek získáme ze vztahu (1) kupříkladu následující posloupností algebraických úprav

$$\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}\left(y+\mathrm{i}\,(x-a)\right) = \left(x+\mathrm{i}\,(x+a)\right),$$
$$\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}\left(y+\mathrm{i}x\right) = \left(y+\mathrm{i}x\right) + \mathrm{i}a\left(\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}+1\right),$$
$$y+\mathrm{i}x = \mathrm{i}a\frac{\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}+1}{\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}-1}.$$

Nyní zbývá určit imaginární a reálnou část pravé strany poslední rovnosti, přičemž se snažíme ve výrazu identifikovat goniometrické nebo hyperbolické funkce podle definice, tedy například $\cosh\alpha = \frac{\mathrm{e}^\alpha+\mathrm{e}^{-\alpha}}{2}$ a podobně. Jest

$$\mathrm{i}a\frac{\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}+1}{\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}-1} = \mathrm{i}a\frac{\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}+1}{\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}-1}\frac{\mathrm{e}^{\alpha-\mathrm{i}\beta}+1}{\mathrm{e}^{\alpha-\mathrm{i}\beta}-1} = \mathrm{i}a\frac{\mathrm{e}^{2\alpha}-\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}+\mathrm{e}^{\alpha-\mathrm{i}\beta}-1}{\mathrm{e}^{2\alpha}-\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}-\mathrm{e}^{\alpha-\mathrm{i}\beta}+1} = \mathrm{i}a\frac{\mathrm{e}^{\alpha}-\mathrm{e}^{\alpha}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}}{\mathrm{e}^{\alpha}+\mathrm{e}^{\alpha}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}} = \mathrm{i}a\frac{\sinh\alpha-\mathrm{i}\sin\beta}{\cosh\alpha-\cos\beta},$$

a po dostazení na pravou stranu rovnosti $y+\mathrm{i}x = \mathrm{i}a\frac{\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}+1}{\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta}-1}$ dostaneme srovnáním reálné a imaginární části požadované tvrzení.