Termín pro odevzdání: čtvrtek 25. března 2021

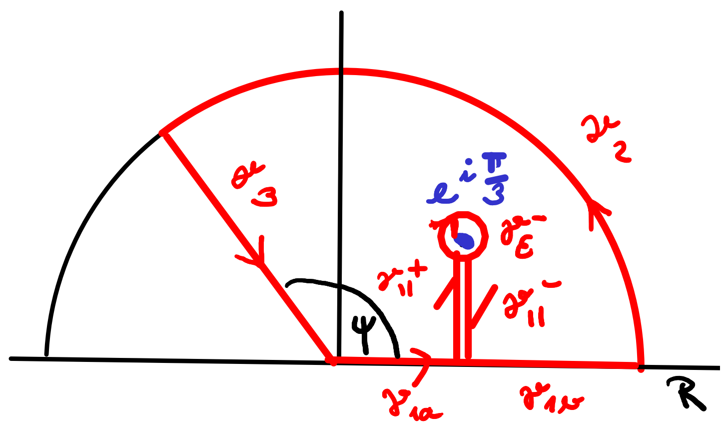
Mějme funkci

$$f(z) = \frac{z}{z^3+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Uvažujme křivku γ, která vznikne součtem křivek γ_{1a}, $\gamma_{||}^+$, γ_{ϵ^-}, $\gamma_{||}^-$, γ_{1b}, γ_2 a γ_3 (viz obrázek 1):

$$\gamma_{1a} + \gamma_{1b} = \gamma_1 : z = t,\ t \in [0,R],\ R > 1$$
$$\gamma_2 : z = Re^{i\varphi},\ \varphi \in [0,\psi],\ 0 < \psi < \pi$$
$$\gamma_3 : z = te^{i\psi},\ t \in [R,0],\ R > 1$$
$$\gamma_{\epsilon^-} : z = e^{i\frac{\pi}{3}} + \epsilon e^{i\phi},\ \varphi \in [\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}],\ \epsilon > 0, \epsilon \text{ malé.}$$

1. Ukažte, že $\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$ a $\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z$ jsou si pro vhodné ψ (tj. $\psi = \frac{2}{3}\pi$) rovny až na multiplikativní konstantu.
2. Pomocí odhadu ukažte, že platí $\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 0$ pro $R \to \infty$.
3. Vypočítejte $\int_{\gamma_\epsilon^-} f(z)\mathrm{d}z$, vyšetřete $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\epsilon^-} f(z)\mathrm{d}z$.
4. S pomocí předchozích výsledků ukažte, že platí $I = \int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.



Obrázek 1:

Řešení:

Vypočítejte integrál $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$. Nápověda využijte kladně orientovaný obvod kruhové výseče $|z| = R$, $0 \le \arg z \le \psi$ pro $\psi = \frac{2}{3}\pi$. Uvažujme

$$f(z) = \frac{z}{z^3+1} = \frac{z}{(z-e^{i\frac{\pi}{3}})(z-e^{i\pi})(z-e^{i\frac{5\pi}{3}})}.$$

Uvažujme za použití Cauchyovy věty

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\mathrm{d}z$$

.

Pro jednotlivé části platí

- $\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x \xrightarrow{R\to\infty} \int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x = I,$
- $0 \le \left|\int_{\gamma_2} f(z)\right| = \left|\int_0^\psi \frac{Re^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi})^3+1} iRe^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi\right| \le \psi \frac{R^2}{R^3-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$
- $\int_{\gamma_3} f(z) = -\int_0^R \frac{te^{i\psi}}{(te^{i\psi})^3+1} e^{i\psi}\mathrm{d}t$, pokud zvolíme $e^{i3\psi} = e^{i2\pi} = 1$ a tedy $\psi = \frac{2\pi}{3}$, můžeme pokračovat $-e^{i\frac{4}{3}\pi} \int_0^R \frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t \xrightarrow{R\to\infty} -e^{i\frac{4}{3}\pi} I$

- $$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\gamma_\epsilon} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}+\epsilon e^{i\varphi}}{(\epsilon e^{i\varphi})(e^{i\frac{\pi}{3}}+\epsilon e^{i\varphi}+1)(e^{i\frac{\pi}{3}}+\epsilon e^{i\varphi}-e^{i\frac{5\pi}{3}})} i\epsilon e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi =$$
$$\left|\text{Lebesgue, majoranta}\frac{1+\epsilon}{(\sqrt{3}-\epsilon)^2}\right| = \int_0^{2\pi}\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{(e^{i\frac{\pi}{3}}+1)(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{5\pi}{3}})} i\mathrm{d}\varphi = 2\pi i\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{(e^{i\frac{\pi}{3}}+1)i\sqrt{3}}$$

Celkově $\left(1-e^{i\frac{4}{3}\pi}\right) I = 2\pi\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{(e^{i\frac{\pi}{3}}+1)\sqrt{3}} \quad\to\quad I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$