13. Měřitelné množiny, míry, Lebesgueovy L^p prostory

[Measurable sets, measures, Lebesgue L^p spaces]

Lebesgueův integrál jsme vybudovali na pojmech „množiny míry nula", „jednoduché funkce", „monotonie", „limitní přechody" a zavedli jsme při konstrukci následující prostory funkcí

- H .... schodovité funkce
- M^+, L^+ .... nezáporné měřitelné a lebesgueovy (lebesgueovy) integrovatelné funkce

  POZOR! Nejsou vektorové prostory.
- M, L .... měřitelné a lebesgueovy integrovatelné fce. (lebesgueovy)

Nyní od funkcí přejdeme k množinám (lebesgueovsky a borelovsky měřitelným) a k zobrazením definovaných na množinách (tj. mírám).

13.1 Měřitelné množiny a míry

Def Řekneme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je Lebesgueovsky měřitelná jestliže charakteristická funkce χ_Ω je lebesgueovsky měřitelná, tzn.

$$\boxed{\chi_\Omega \in M^+}$$

Označení $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je systém všech lebesgueovsky měřitelných množin

Připomeňme, že $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ označuje systém všech podmnožin v $\mathbb{R}^d$. Tedy máme $\Lambda(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Jak je ukázáno v konstrukci na konci této podkapitoly, lze (za předpokladu platnosti Axiomu výběru) sestrojit neměřitelné množiny. Odsud plyne

$$\Lambda(\mathbb{R}^d) \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d),$$

neboli není pravda, že každá podmnožina v $\mathbb{R}^d$ je měřitelná. Chtěli bychom vědět o struktuře $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ více.

Začneme připomenutím pojmů topologie a topologického prostoru.

$\boxed{\text{Def.}}$ Soubor podmnožin $\mathcal{T}$ množiny X (tzn. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$) se nazývá <u>topologie</u> $\overset{df.}{\equiv}$

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$
- $A_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}$

neboli topologie obsahuje alespoň $\emptyset$ a X a pak je uzavřená na konečné průniky a libovolná sjednocení. $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor

Nyní zavedeme jinou strukturu, nazývanou <u>σ-algebra</u> (kde σ referuje k spočetným sjednocením)

$\boxed{\text{Def}}$ Soubor podmnožin Σ množiny X (tzn. $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$) se nazývá <u>σ-algebra</u> $\overset{df.}{\equiv}$

- $X \in \Sigma$
- $A \in \Sigma \Rightarrow A^c := X \setminus A \in \Sigma$
- $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma, \quad \bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma$

(X, Σ) se nazývá měřitelný prostor.

<u>Poznámka</u>
- Lze nahradit 2. a 3. bod v definici body
  - $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma$
  - $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma.$
- z prvních dvou vlastností σ-algebry plyne, že $X, \emptyset \in \Sigma$.

<u>Příklady</u> ① $\{\emptyset, X\}$ je topologie i σ-algebra

② $\mathcal{P}(X)$ je topologie i σ-algebra

③ $\{\emptyset, \mathbb{R}, (0,1)\}$ je topologie v $\mathbb{R}$, ale není σ-algebra

④ Připomeň, že topologii v $\mathbb{R}^d$ je generována $B_\varepsilon(x_0)$, kde $\varepsilon > 0$ a $x_0 \in \mathbb{R}^d$ jsou libovolné a $B_\varepsilon(x_0) := \{y \in \mathbb{R}^d; \|y - x_0\|_{\infty, \mathbb{R}^d} < \varepsilon\}$.

Topologie obsahuje "jen" otevřené množiny (neb jsou-li A, B, A_α otevřené $\Rightarrow A \cap B$ a $\bigcup A_\alpha$ jsou otevřené).

Povšimněme si, že v takto definované topologii jsou jejími generátory otevřené intervaly, které jsou dle definice (lebesgueovské) měřitelnosti (lebesgueovsky) měřitelné.

Není těžké nahlédnout, viz důkaz Věty 13.1 níže, že platí:

$$\underbrace{B_\varepsilon(x_0) \cap B_\xi(x_1) \in \Lambda(\mathbb{R}^d) \quad \text{a} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\varepsilon_n}(x_n) \in \Lambda(\mathbb{R}^d)}_{}.$$

a tedy

$$A \in \mathcal{T} \quad \text{pak} \quad A \in \Lambda(\mathbb{R}^d).$$

Také vidíme, že je přirozené zavést (nejmenší) Σ-algebru generovanou topologií, tj. souborem všech otevřených množin. Protože otevřené množiny jsou, dle výše uvedeného, prvky $\Lambda(\mathbb{R}^d)$, tj. jsou lebesgueovsky měřitelné, tak se dá snadno nahlédnout, viz důkaz Věty 13.1, že takto generovaná σ-algebra je podmnožinou $\Lambda(\mathbb{R}^d)$. Tato σ-algebra se označuje $\underline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ a nazývá se <u>σ-algebra borelovsky měřitelných množin</u>.

Obsahuje nejen otevřené, ale i uzavřené množiny, ale také spočetné průniky otevřených množin (tzv. množiny G_δ), a všechna spočetná sjednocení uzavřených množin (tzv. množiny F_σ), atd. ($G_{\delta\sigma}, F_{\sigma\delta}, \ldots$).

Ve Větě 13.1 si ukážeme, že $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je Σ-algebra. Odsud a z předchozího plyne, že

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \Lambda(\mathbb{R}^d)$$

což "dokazuje" tvrzení: „skoro všechny množiny jsou měřitelné".

Ozn. G_δ, F_σ pochází z němčiny a francouzštiny:

- G ... geöffnet / gebiet
- F ... fermé
- $\cap$ ... δ ... Durchschnitt
- $\cup$ ... σ ... somme

Platí

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \Lambda(\mathbb{R}^d)$$

$\boxed{\text{Def}}$ Buď $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$. Pak zobrazení $\mu : \Sigma \to \underbrace{\mathbb{R}^+_0 \cup \{+\infty\}}_{\langle 0,+\infty \rangle}$

se nazývá <u>míra</u> $\overset{df}{\equiv}$

1) Σ je σ-algebra
2) μ je nezáporná a $\mu(\emptyset) = 0$
3) μ je σ-aditivní, tj. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma$
   - $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

   a navíc, jsou-li $A_i \cap A_j = \emptyset \;\; \forall i,j,\, i \neq j$
   - $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

$\boxed{(X, \Sigma, \mu) \text{ se nazývá prostor s mírou}}$

$\boxed{\text{Def.}}$ ▶ Řekneme, že $\boxed{\text{míra } \mu \text{ je úplná}}$ pokud platí:

Je-li $A \subset B$ a $B \in \Sigma$ a $\mu(B) = 0$, pak $A \in \Sigma$

$[\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B) = 0] \Longrightarrow$ (a nutně $\mu(A) = 0$)

▶ Řekneme, že <u>míra μ je absolutně spojitá vzhledem k míře ν</u>,
píšeme $\boxed{\mu \ll \nu}$ $\overset{\text{def}}{\equiv}$ Je-li $A \in \Sigma$ a $\nu(A) = 0$, pak $\mu(A) = 0$.

$\boxed{\text{Věta 13.1}}$ ▶ Systém všech Lebesgueovsky měřitelných množin $\Lambda(\mathbb{R}^d)$
je σ-algebra

▶ Definujeme-li pro libovolné $f \in M^+(\mathbb{R}^d)$ zobrazení

$$\nu_f : \Lambda(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^*_{\geq 0} \text{ předpisem}$$

$$\nu_f(\Omega) := (\mathcal{L})\int_{\Omega} f \, dx := \int f \chi_{\Omega},$$

pak ▶ ν_f je úplná (ii) míra (i), která je absolutně spojitá (iii) vzhledem k Lebesgueově míře λ_d definované

$$\lambda(\Omega) \overset{\text{df}}{=} \lambda_d(\Omega) := \int \chi_{\Omega}. \qquad (\nu_f \ll \lambda_d)$$

Důkaz $\boxed{\text{Krok 1}}$ $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je Σ-algebra.

(a) $\boxed{\mathbb{R}^d \in \Lambda(\mathbb{R}^d)} \Leftrightarrow 1 \in M^+$, avšak $h_n = \chi_{[-n,n]^d} \nearrow 1$

a tedy $1 = \sup h_n \in M^+$ dle definice M^+.

(b) $\boxed{A, B \in \Lambda(\mathbb{R}^d) \Rightarrow A \setminus B \in \Lambda(\mathbb{R}^d)}$

Jsou-li $A, B \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$, tj. $\chi_A, \chi_B \in M^+$, pak viz Věta 3.3, Věta 3.11,

$$\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\} \in M^+(\mathbb{R}^d)$$
$$\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} \in M^+(\mathbb{R}^d)$$

a proto

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_{A\setminus(B\cap A)} = \chi_A - \chi_{B\cap A} \in M^+(\mathbb{R}^d)$$

tak $A \setminus B \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$.

(c) $\boxed{A_n \in \Lambda(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \bigcup A_n \in \Lambda(\mathbb{R}^d)}$ neboť $\chi_{A_n} \in M^+$ a

tedy $\sup\limits_n \chi_{A_n} \in M^+ \Leftrightarrow \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \in M^+ \Leftrightarrow \bigcup A_n \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$.

$\boxed{\text{Krok 2}}$ $\boxed{\text{Vlastnosti } \nu_f}$

(1) ν_f je definována na $\underline{\sigma\text{-algebře}}$ $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ a $\nu_f(\Omega) \geq 0$ pro $f \geq 0$ a $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ neboť $f\chi_\Omega \geq 0 \xRightarrow{\text{Věta 3.3}} \int f\chi_\Omega \geq 0$.

(2) Jsou-li $A_i \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$, $i \in \mathbb{N}$, navzájem disjunktní, pak

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu_f(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int f\chi_{A_i} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int f\chi_{A_i} \overset{\text{aditivita}}{=}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int f\chi_{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} \underset{\chi_{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} \nearrow \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}}{\overset{\text{Levi}}{=}} \int f\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$$

$$= \nu_f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

(3) $\boxed{\nu_f \text{ je úplná}}$

Vskutku, je-li $A \subset B$ a $B \in \Sigma$ a $\nu_f(B) = 0$ pak

$$\nu_f(B) = \int f\chi_B = 0 \underset{\text{V.3.8}}{\Rightarrow} f\chi_B = 0 \text{ s.v.} \Rightarrow f\chi_A = 0 \text{ s.v.}$$

$$\int f\chi_A = 0 \Longrightarrow \nu_f(A) = 0$$

(4) $\boxed{\nu_f \ll \lambda_d}$

Je-li $\lambda_d(E) = 0$, pak $\chi_E = 0$ s.v., pak $f\chi_E = 0$ s.v. $\Rightarrow \nu_f(E) = 0$.

DVĚ DŮLEŽITÉ POZNÁMKY

(1) ν_f a speciálně Lebesgueova míra nejsou úplné na σ-algebře borelovských měřitelných fcí $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (ani pro $d=1$).

(2) • Z předchozí věty plyne existence ∞-mnoha měr, které lze na $\mathbb{R}^d$ zavést. Výjimečnou vlastností Lebesgueovy míry je její normalizace na objem jednotkové krychle

$$\lambda_d\left([0,1]^d\right) = 1.$$

• Z předchozí věty plyne implikace

$$\boxed{\nu_f(\Omega) := \int_\Omega f \chi_\Omega \text{ kde } f \in L_1, f \geq 0} \Rightarrow \boxed{\nu_f << \lambda_d}$$

Platí (za předpokladu konečnosti míry λ_d na X, definice je uvedena níže) obrácená implikace tzv. Radon-Nikodymova věta:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Je-li } \nu << \lambda \text{ a } \lambda(X) < +\infty, \\ \text{pak } \exists f \geq 0,\ f \in L(X) \text{ tak, že } \nu(\Omega) = \int_\Omega f(x)\,dx\end{array}}$$

Jiný zápis $\quad \nu << \lambda \iff \exists f \in L(X) \quad \nu(\Omega) = \int_\Omega f(x)\, d\lambda(x)$

Fyzikální interpretace: Buď $X \subset \mathbb{R}^3$ omezená, otevřená, souvislá.

Nechť X představuje "spojité (homogenizované/průměrované" prostředí (tekutiny, plyny, pevné látky).
V takovém prostředí je přirozené požadovat:

$\boxed{\text{je-li objem nějaké podmnožiny } \Omega \subset X \text{ nulový, je pak i hmotnost látky přiřazené této množině nulová.}}$

$P \subset X$

$P \longmapsto V(P)$

$P \longmapsto M(P)$

jsou dvě míry. Výrok v $\boxed{\dots}$ říká, že $M << V$.
Pak dle Radon-Nikodymovy věty existuje $\rho \in L^+(\Omega)$ tak, že $M(\Omega) = \int_\Omega \rho\, dV \quad \forall \Omega \in \Lambda(X)$.

$\boxed{\rho \text{ se nazývá hustota}}$

DVĚ DŮLEŽITÁ/ZAJÍMAVÁ ROZŠÍŘENÍ

1 Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ($f \geq 0$) spojitá, pak $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ nejen splňuje $F'(x) = f(x)$, ale (navíc) $\nu_f((a,x)) := \int_a^x f(s)\,ds$ je <u>míra</u> (úplná a <u>absolutně spoj. vzhledem k Lebesgueově míře</u>) a platí

$$\boxed{\nu_f((a,x)) = F(x) - F(a) \quad \text{a} \quad \nu_f((a,b)) = F(b) - F(a)}$$

Tyto poslední vztahy mohu zobecnit a zavést další/jiné míry obecněji.

<u>Buď F neklesající na $\langle a,b \rangle$</u>. Pak f může mít nejvýše spočetně bodů nespojitosti. Je-li x_0 bod nespojitosti, pak $F(x_0+) := \lim_{x \to x_0+} F(x)$ a $F(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} F(x)$, přičemž obě limity z monotónie existují a $F(x_0)$ může být jakákoliv hodnota mezi $F(x_0-)$ a $F(x_0+)$. (Až) definujeme-li $F(x_0) = F(x_0+)$, pak F je nejen <u>neklesající</u> na $\langle a,b \rangle$, ale také <u>spojitá zprava</u>. Platí:

Tvrzení ▶ Je-li F neklesající fce na $\mathbb{R}$ spojitá zprava, pak existuje jediná míra μ (často značená dF) definovaná na σ-algebře lebesgueovsky měřitelných množin tak, že

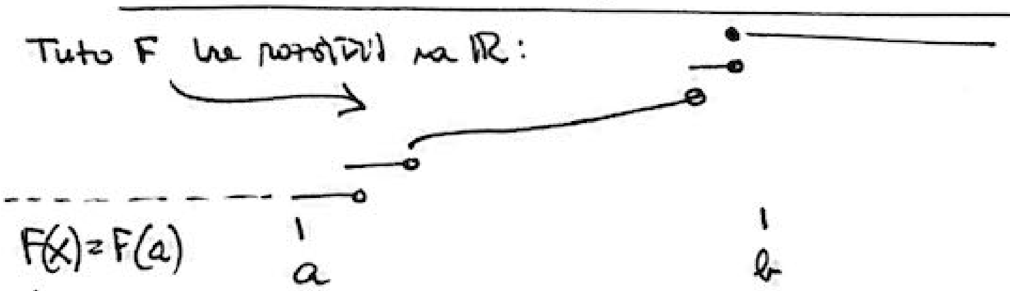
$$\mu((a,x]) = F(x) - F(a).$$

▷ Naopak, je-li μ míra definovaná na σ-algebře lebesgueovsky měřitelných množin, která je konečná na omezených intervalech, pak F definovaná

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\mu((-x,0]) & x < 0 \end{cases}$$

je neklesající a spojitá zprava.

Tuto F lze rozšířit na $\mathbb{R}$:



$F(x) = F(b) \quad \forall x \geq b$

$F(x) = F(a)$
$\forall x < a$

? K čemu je toto zobecnění vhodné? (užitečné)

Podobně jako jsme aproximovali plochu pod grafem nezáporné funkce, můžeme zkusit určit statický moment rovinné či prostorové oblasti. Moment hmotného bodu $x \in (a,b)$ hmotnosti μ vzhledem k počátku je roven $|x|\mu$. Máme-li n-bodů $x_i \in (a,b)$ s hmotností μ_i, pak moment příslušný úsečce (a,b) je $\sum_{i=1}^{m} |x_i|\mu_i$. Obecně: Je-li

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = b$$

dělení (a,b), $\xi_j \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ a je-li $\mu(x)$ hmotnost úsečky $[a,x)$. Pak pro $\forall j \in \{1,\dots,m\}$ je hmota úsečky

$$\mu(\alpha_j) - \mu(\alpha_{j-1})$$

Soustředíme-li tuto hmotu do bodu ξ_j, pak moment segmentu (α_{j-1}, α_j) je roven $|\xi_j|(\mu(\alpha_j) - \mu(\alpha_{j-1}))$

a moment (a,b) vzhledem k počátku je přibližně

$$\sum_{j=1}^{m} |\xi_j| \left(\mu(\alpha_j) - \mu(\alpha_{j-1})\right)$$

Limitním přechodem dostaneme objekt, který lze označit

$$M = \int_a^b |x| \, d\mu(x) \quad \dots \quad \underline{\text{Stieltjesův integrál}}$$

- Riemann-Stieltjess
- Lebesgue-Stieltjes

Místo $|x|$ může být jiná funkce:

např. $$I = \int_a^b |x|^2 d\mu(x) \quad \dots \text{ moment setrvačnosti}$$

nebo $$J_k = \int_a^b |x|^k d\mu(x) \quad \dots \ k\text{-tý moment}$$

Také • Křivkový integrál 1. druhu

$$\int_{\langle\varphi\rangle} \underset{\substack{\text{hustota}\\ \text{drátu}\ \geq 0}}{f} ds = \int_a^b \underbrace{(f\circ\varphi)(t)}_{\geq 0} \underbrace{|\vec{\varphi}'(t)|}_{\substack{\text{délka}\\ \ell}} dt = \int_a^b (f\circ\varphi)\, dv \qquad v(t) = \ell(\varphi; \langle a,t\rangle)$$

lze nahlížet jako Stieltjesův integrál a

• Křivkový integrál 2. druhu: $\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_a^b (\vec{f}\circ\varphi)(t)\cdot\vec{\varphi}'(t)\,dt = \sum_1^d \int_a^b f_k(\varphi)\, d\varphi_k$

[2] Pravděpodobnostní prostor

• $\mu: \Sigma \to \mathbb{R}_0^+$ je pravděpodobnostní míra $\overset{\text{def}}{\equiv}$ $\mu(X) = 1$.

Def. Řekneme, že $\mu: \Sigma \to \mathbb{R}_0^+$ je konečná $\overset{\text{def}}{\equiv}$ $\mu(X) < +\infty$

$\hookrightarrow$ σ-algebra měř. množin X

Řekneme, že $\mu: \Sigma \to \mathbb{R}_0^+$ je σ-konečná $\equiv$ existují-li $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\boxed{\mu(X_n) < \infty}$ & $\boxed{X_n \nearrow X}$ (tzn. $X_{n+1} \supset X$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$)

Prostor s mírou (X, Σ, P) — Σ: σ-algebra, P: konečná míra taková, že $P(X) = 1$ — se nazývá pravděpodobnostní prostor.

Příklady ① Buď $X = \{w_1, \dots, w_N\}$ konečná množina, Buď $\{p_j\}_{j=1}^{N}$ nezáporná čísla taková, že $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$.

Buď Σ systém všech podmnožin X, tzn. $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ je σ-algebra

Pak pro $\forall A := \{w_{j_1}, \dots, w_{j_m}\} \in \Sigma$ s $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_m \leq N$ definujme $P(A) = \sum_{k=1}^{m} p_{j_k}$. Pak (X, Σ, P) je diskrétní pravd. prostor

② $X = \mathbb{R}^d$, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a $f \geq 0$ integrovatelná funkce t.ž., že $\int_{\mathbb{R}^d} f\, dx = 1$

[Je-li $d=1$, vol např. $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$]

Pak $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P)$ je pravděp. prostor, pokud $P(\Omega) = \int_{\Omega} f(x)\, dx$.

③ Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^d$ je pevný. Definujme $P(\Omega) = \begin{cases} 1 & x_0 \in \Omega \\ 0 & x_0 \notin \Omega \end{cases}$

Pak $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P)$ je také pravděpodobnostní prostor

P — Diracova bodová míra. $P = \delta_{x_0}$

Příklad (konstrukce neměřitelné množiny) Tato konstrukce je založena na Axiomu výběru a jednoduchém vztahu ekvivalence mezi reálnými čísly z $[0,1]$.

Řekneme, že $x, y \in [0,1]$ jsou ekvivalentní, $x \sim y$, jestliže $x - y \in \mathbb{Q}$ (rozdíl je racionální)

(určitě platí: $x \sim x$; $x \sim y \Rightarrow y \sim x$; $x \sim y$ & $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

tedy $x \sim y$ je ekvivalence)

Nyní rozdělíme $[0,1]$ do tříd ekvivalence, např.

- $\mathbb{Q} \subset [0,1]$ tvoří jednu třídu
- $\frac{\sqrt{2}}{2} + p$, kde $p \in \mathbb{Q}$ tak, že $\frac{\sqrt{2}}{2} + p \in [0,1]$ tvoří další třídu
- atd

Dvě třídy ekvivalence jsou buď stejné nebo disjunktní. A platí

$$[0,1] = \bigcup_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \quad \text{kde } \mathcal{E}_{\alpha} \text{ je jedna třída ekvivalence.}$$

Nyní definujme naši množinu

$$N = \{x_{\alpha}\}_{\alpha} \quad \text{kde } x_{\alpha} \in \mathcal{E}_{\alpha} \text{ je jediný z } \mathcal{E}_{\alpha}.$$

Tato konstrukce je možná díky axiomu výběru: Buď E množina a $\{E_{\alpha}\}$ soubor neprázdných podmnožin E, přičemž množina indexů není spočetná. Pak existuje funkce $\alpha \mapsto x_{\alpha}$ (výběrová funkce) tak, že $x_{\alpha} \in E_{\alpha}$ $\forall \alpha$.

$\boxed{\text{Ukážeme, že } N \text{ není měřitelná}}$ Sporem. Nechť N je měřitelná.

Uvažujme posunutí množiny N typu

$$N_k = N + r_k$$

kde $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ představují všechna racionální čísla z $\langle -1, 1 \rangle$

Není obtížné ověřit (OVĚŘTE SI), že:

- N_k jsou navzájem disjunktní
- $[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset [-1,2]$.

Kdyby N byla měřitelná, pak jsou N_k také měřitelné $\forall k \in \mathbb{N}$.
Protože N_k jsou navzájem disjunktní, tak

$$1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(N_k) \le 3.$$

Protože N_k jsou jen posunutí N tak $\lambda_1(N_k) = \lambda_1(N)$.
Tedy

$$1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(N) \le 3,$$

což vede ke sporu jak v případě kdy $\lambda_1(N)=0$, nebo když $\lambda_1(N)>0$ $\boxtimes$

13.2. Lebesgueovy prostory

nebo také L^p-prostory představují významný matematický nástroj spojující teorii míry, integrální počet a funkcionální analýzu. L^p-prostory jsou významné v teorii diferenciálních rovnic (ODR, PDR), v teorii pravděpodobnosti, moderní analýze, kvantové fyzice.

Z našeho pohledu bude užitečné pozorování, že Lebesgueovy prostory $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le +\infty$, jsou úplné a to vzhledem k integrální normě $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ pro $1 \le p < +\infty$.

Připomeňme, že

$$\Big(C(\Omega), \underbrace{\int_\Omega |f(x)| dx}_{= \|f\|_1} \Big)$$ úplný není.

DŮLEŽITÉ POZOROVÁNÍ

$\|f\|_1 := \int_\Omega |f(x)| dx$ je norma na $C(\Omega)$,

neboť 1) $\|f\|_1 \ge 0$ a $\|f\|_1 = 0 \iff f(x) \equiv 0 \ \forall x \in \Omega$

2) $\|\lambda f\|_1 = \int_\Omega |\lambda f(x)| dx = |\lambda| \, \|f\|_1$

3) $\|f+g\|_1 = \int_\Omega |f(x)+g(x)| dx$

$\underset{\substack{\Delta\text{-nerovnost v } \mathbb{R} \\ + \\ \text{aditivita}}}{\le} \int_\Omega |f(x)| dx + \int_\Omega |g(x)| dx \le \|f\|_1 + \|g\|_1$

!! ALE $\|f\|_1$ není "striktně řečeno" na $L(\Omega)$ = prostor lebesgueovsky integrovatelných fcí.

Proč?

$\boxed{\text{Definice}}$ Pro $\boxed{1 \le p \le +\infty}$, definujeme a $\boxed{\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)}$

lebesgueovsky integrovatelné fce

a) $\boxed{1 \le p < \infty}$ $\quad L^p(\Omega) := \{ [f] ; |f|^p \in L(\Omega) \}$

b) $\boxed{p = \infty}$ $\quad L^\infty(\Omega) := \{ [f] ;\ f$ lebesgueovsky měřitelných, $f \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$, $\exists M > 0 \quad |f(x)| < M$ s.v. v $\Omega \}$

Pro $p \in \langle 1, +\infty)$, definujeme $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$, kde $f \in [f]$

Pro $p = \infty$, definujeme

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{N \\ \lambda_d(N) = 0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)|$$

Zde $[f]$ označuji třídu ekvivalentních lebesgueovsky měřitelných funkcí. Tzn., f a $\tilde{f} \in [f] \overset{\text{df.}}{\equiv} f = \tilde{f}$ s.v. v Ω. Neboli, na základě rovnosti skoro všude mohu lebesgueovsky měřitelné funkce rozdělit do tříd, kde dva reprezentanti stejné třídy se rovnají až na množinu míry nula.

Připomeň definice a vlastnosti pre-Hilbertových, normovaných, metrických prostorů. Také, co jsou Hilbertovy, Banachovy a úplné metrické prostory. Viz kapitola 8.

Lze přidat dvě důležité definice (lze je definovat i pro metrické či topologické prostory)

$\boxed{\text{Def}}$ (i) Řekneme, že $Y \subset (X, \|\cdot\|_X)$ je <u>hustá</u> v X

$\overset{\text{df.}}{\equiv} \forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in X \ \exists y \in Y \quad \|y - x\| < \varepsilon$

(ii) Řekneme, že $(X, \|\cdot\|_X)$ je <u>separabilní</u> $\overset{\text{df.}}{\equiv}$ $\exists$ spočetná podmnožina $Y \subset X$, která je <u>hustá</u> v X.

$\boxed{\text{v } \mathbb{R}^d}$ jsme si ukázali, že pro $1 \le p \le +\infty$ platí Hölderova a Minkowského nerovnost, což implikovalo, že

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^d \longmapsto \|\vec{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ je norma.}$$

Připomeň si v kapitole 8.

Hölderova a Minkowského nerovnost platí i pro L^p-prostory.

$\boxed{\text{Věta 13.2}}$ (Hölderova nerovnost) Buď $f \in L^p(\Omega)$ a $g \in L^q(\Omega)$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \le p \le +\infty$. Pak

- $fg \in L^1(\Omega)$
- $$\left| \int_\Omega fg \, dx \right| \le \int_\Omega |fg| \, dx = \boxed{\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q} \quad \text{(H)}$$

Dk. • Případy $\boxed{p=+\infty,\ q=1}$ resp. $\boxed{p=1 \text{ a } q=+\infty}$ jsou jednoduché. SAMI.

• Nechť $\boxed{p \in (1,+\infty)} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} \in (1,+\infty)$

Je-li $\|f\|_p = 0$ nebo $\|g\|_q = 0$, pak Hölderova nerovnost triviálně platí.

Je-li tedy $\|f\|_p > 0$ a $\|g\|_q > 0$, pak

$$\frac{f(x)\,g(x)}{\|f\|_p \|g\|_p} \le \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \overset{\text{Young}}{\le} \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

Odsud integrací přes Ω:

$$\underbrace{\left| \int_\Omega \frac{f(x)}{\|f\|_p} \frac{g(x)}{\|g\|_q} \, dx \right|}_{} \le \frac{1}{p} \frac{\int_\Omega |f(x)|^p dx}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_\Omega |g(x)|^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \underbrace{1}_{}$$

$$\| \qquad \le \underbrace{\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_\Omega |f(x)\,g(x)| \, dx}_{}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \left| \int_\Omega f(x)\,g(x) \, dx \right|}_{}$$

a podtržené dává tvrzení.

■

$\boxed{\text{Věta 13.3}}$ (Minkowského nerovnost) Buď $p \in \langle 1, +\infty \rangle$. Pak pro $f, g \in L^p$:

$$\boxed{\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p}$$

Dk. ▸ Je-li $\boxed{p = +\infty}$: $F = \|f\|_\infty$ je nejmenší číslo takové, že $|f(x)| \leq F$ pro s.v. $x \in \Omega$

a $G = \|g\|_\infty$ — ″ —, že $|g(x)| \leq G$ pro s.v. $x \in \Omega$

Pak $|f(x) + g(x)| \leq F + G$ pro s.v. $x \in \Omega$

což dává tvrzení.

▸ Je-li $\boxed{p = 1}$, důkaz jednodušší a už jsme jej použili dříve.

▸ Je-li $\boxed{p \in (1, +\infty)}$

$$\underset{\sim\sim\sim}{\|f+g\|_p^p} = \int_\Omega |f(x) + g(x)|^p \, dx$$

$$= \int_\Omega |f(x) + g(x)| \, |f(x) + g(x)|^{p-1} \, dx$$

$$\leq \int_\Omega \left(|f(x)| + |g(x)|\right) |f(x) + g(x)|^{p-1} \, dx$$

$$\underset{\sim}{\leq} \int_\Omega \underset{\downarrow\, s = p}{|f(x)|} \, \underset{\downarrow\, s' = p' = p/p-1}{|f(x) + g(x)|^{p-1}} \, dx + \int_\Omega |g(x)| \, |f(x) + g(x)|^{p-1}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \left(\int_\Omega |f(x) + g(x)|^{\underbrace{\frac{p}{p-1}(p-1)}_{p}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1}$$

$$= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \|f+g\|_p^{p-1}}$$

a podvlněné implikuje tvrzení. ☺

<u>DŮSLEDEK</u> $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\right)$ jsou pro $p \in \langle 1, +\infty \rangle$

<u>Normované prostory</u>

Pro $\boxed{p = 2}$ je $L^2(\Omega)$ prostor se skalárním součinem

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x) g(x) \, dx.$$

Následující důležitá věta říká, že $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ jsou úplné normované prostory, tedy Banachovy.

$\boxed{\text{Věta 13.4}}$ (Rieszova věta) Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v $L^p(\Omega)$, pak existuje $f \in L^p(\Omega)$: $\|f_n - f\|_p \to 0$ pro $n \to \infty$.

{ neboli: $\forall$ cauchyovská posloupnost má v $L^p(\Omega)$ limitu a tedy $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ jsou úplné. }

Dk Případ $p = +\infty$ je triviální: Z předpokladů plyne existence $N \subset \Omega$, $\lambda_d(N) = 0$, tak, že $\{f_n(x)\}$ je cauchyovská $\forall x \in \Omega \setminus N$. Pro pevné $x \in \Omega \setminus N$ má $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (posloupnost čísel v $\mathbb{R}$) limitu; označme ji $f(x)$. Zbývá ověřit, že $f \in L^\infty(\Omega)$ a $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ pro $n \to \infty$.

Případ $1 \le p < +\infty$ $\boxed{\text{KROK 1}}$ (NALEZENÍ f)

Z $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, a z definice cauchyovskosti, vybereme podposloupnost $g_j := f_{n_j}$ tak, že
$$S := \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\|g_{j+1} - g_j\|_p}_{< \frac{1}{2^j}} < +\infty$$

$\boxed{F_j := g_{j+1} - g_j}$

Označme
$$h(x) := \sum_{j=1}^{\infty} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \ge 0$$

Pak
$$0 \le \int_\Omega |h(x)|^p dx = \int_\Omega \Big(\lim_{k\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{k} |g_{j+1}(x) - g_j(x)|}_{=: G_k \ge 0 \text{ a } G_k \nearrow}\Big)^p dx$$

$$= \int_\Omega \Big(\lim_{k\to\infty} G_k\Big)^p dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} (G_k)^p$$

$\boxed{z \mapsto z^p \text{ je spojitá}}$

$$\overset{\text{Levi}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_\Omega G_k^p \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (F_1 + \dots + F_k)^p = \lim_{k\to\infty} \|F_1 + \dots + F_k\|_p^p$$

$$\overset{\text{Minkowski}}{\le} \lim_{k\to\infty} \Big(\|F_1\|_p + \dots + \|F_k\|_p\Big)^p \le \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \|g_{j+1} - g_j\|_p\Big)^p =: S^p < +\infty$$

Tedy $h \in L^p(\Omega) \iff |h|^p \in L^1(\Omega) \Rightarrow |h(x)| < +\infty$ pro s.v. $x \in \Omega$

Také $|g_1(x)| < \infty$ pro s.v. x.

Tedy pro s.v. $x \in \Omega$ ~~aj~~ $\{g_j(x)\}_{j=1}^{\infty} = \{f_{n_j}(x)\}$ cauchyovská

$\boxed{\text{OZNAČ}}$: $\boxed{f(x) := \lim_{j \to \infty} f_{n_j}(x)}$

$\boxed{\text{KROK 2}}$ Zbývá ukázat, že $\|f_n - f\|_p \to 0$ pro $n \to \infty$

Pozorujeme:

- $|f_{n_j}|^p \longrightarrow |f|^p$ s.v. v Ω
- $$|f_{n_j}|^p = |f_{n_j} - f_{n_1} + f_{n_1}|^p \le |f_{n_j} - f_{n_{j-1}} + f_{n_{j-1}} - \dots + f_{n_2} - f_{n_1} + f_{n_1}|^p \le \left(\sum_{l=2}^{j} |f_{n_l} - f_{n_{l-1}}| + |f_{n_1}|\right)^p \le \left(|h| + |f_{n_1}|\right)^p$$

Dle Lebesgue věty

$$\int_\Omega |f|^p = \lim_{j \to \infty} \int_\Omega |f_{n_j}|^p \, dx \le \int \left(|h| + |f_{n_1}|\right)^p < +\infty$$

$$\Rightarrow \quad f \in L^p(\Omega).$$

Také z Lebesgueovy věty:

$$\|f - f_{n_j}\|_p^p = \int_\Omega |f - f_{n_j}|^p \longrightarrow 0 \qquad (j \to +\infty)$$

Odsud

$$\|f - f_j\|_p = \|f - f_{n_j}\|_p + \underbrace{\|f_{n_j} - f_j\|}_{\text{podvybraná z cauchyovské.}} \longrightarrow 0$$

ZÁVĚREČNÉ DŮLEŽITÉ KOMENTÁŘE

(i) Z důkazu Rieszovy věty 13.4 plyne:

$$\{f_n\}_{n\geq 1}^{\infty} \text{ cauchyovská v } L^p(\Omega) \Rightarrow \exists \{f_{n_j}\}_{j\geq 1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n\geq 1}^{\infty} \text{ a } \exists f \in L^p(\Omega): f_{n_j} \to f \text{ s.v. v } \Omega$$

Odsud triviálně plyne:

$$\boxed{f_n \longrightarrow f \text{ v } L^p(\Omega) \Rightarrow \exists \{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty} : f_{n_j} \to f \text{ s.v.}}$$

Ze silné konvergence (= konvergence v normě) f_n k f plyne existence vybrané posloupnosti konvergující bodově až na množinu míry nula.

? Je přirozené se ptát, zda neplatí, že celá posloupnost konverguje bodově (až na množinu míry nula)

$$\boxed{Q: \quad f_n \to f \text{ v } L^p \overset{?}{\Rightarrow} f_n \to f \text{ s.v. } \Omega}$$

Příklad, který ukazuje, že tato implikace neplatí:

Uvažujme $\{I_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \langle 0,1\rangle$ soubor intervalů:

$I_0 = \langle 0,1\rangle$; $I_1 = \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, $I_2 = \langle \frac{1}{2}, 1\rangle$

$I_3 = \langle 0, \frac{1}{4}\rangle$, $I_2 = \langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\rangle$, $I_3 = \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\rangle$, $I_4 = \langle \frac{3}{4}, 1\rangle$

$I_7 = \langle 0, \frac{1}{8}\rangle$, ...

⋮

a definujme $f_n := \chi_{I_n}$. Pak $\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |\chi_{I_n}|^2 = |I_n| \to 0$

Lebesg. míra

a tedy $\boxed{\|f_n - 0\|_2 \to 0}$.

Ale: $\forall x \in \langle 0,1\rangle$ $\left.\begin{array}{l} \cdot \limsup f_n(x) = 1 \\ \cdot \liminf f_n(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim f_n(x)$ neexistuje pro $\forall x \in \langle 0,1\rangle$.

$\boxed{vi}$ Zavedli jsme doposud několik typů konvergence pro posloupnosti:

BODOVÁ • $\boxed{f_n \to f \text{ bodově v } \Omega}$ $\equiv \forall x \in \Omega : f_n(x) \to f(x)$

SKORO VŠUDE • $\boxed{f_n \to f \text{ s.v. v } \Omega}$ $\equiv \exists E \subset \Omega, \lambda_d(E) = 0 \text{ a } \forall x \in \Omega \setminus E :$ $f_n(x) \to f(x)$

V NORMĚ nebo V PRŮMĚRU nebo SILNÁ • $\boxed{f_n \to f \text{ v } L^p(\Omega)}$ $\equiv \|f_n - f\|_p \to 0$

STEJNOMĚRNÁ • $\boxed{f_n \rightrightarrows f \text{ v } \Omega}$ $\equiv \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

Platí:

- BODOVÁ $\Rightarrow$ SKORO VŠUDE
- V NORMĚ $\Rightarrow$ $\exists$ VYBRANÉ PODPOSLOUPNOSTI KONVERGUJÍCÍ S.V.
- STEJNOMĚRNÁ $\Rightarrow$ BODOVÁ
- STEJNOMĚRNÁ $\Rightarrow$ v $L^\infty(\Omega)$
- STEJNOMĚRNÁ & $\lambda_d(\Omega) < \infty$ $\Rightarrow$ v $L^p(\Omega)$ $\forall p \in \langle 1, +\infty)$

Dokažte si sami

Cvičení: Pomocí Hölderovy nerovnosti dokažte:

Ω není nutně omezená

Je-li $1 \le p_1 \le p \le p_2 \le \infty$ a $f \in L^{p_2}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega)$, kde $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$, pak platí

$$\|f\|_p \le \|f\|_{p_1}^{\lambda} \|f\|_{p_2}^{1-\lambda}$$

kde $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ je určena rovnicí

$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{p_1} + \frac{1-\lambda}{p_2}.$$

Z této interpolační nerovnosti plyne:

- $f_n \to f$ v $L^1(\Omega)$
- $\{f_n\}$ omezené (tzn. $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty(\Omega)$)

$\Rightarrow f_n \to f$ v $L^p(\Omega)$ pro $\forall p \in \langle 1, +\infty)$

Z výše uvedeného přehledu lze nabýt (oprávněného) dojmu, že stejnoměrná konvergence je silný typ konvergence, zatímco konvergence S.V. je dost obecný, slabší, typ konvergence.

V tomto kontextu je pozoruhodná následující JEGOROVOVA VĚTA.

$\boxed{\text{Věta 13.5}}$ (Jegorovova) Je-li $\lambda_d(\Omega) < +\infty$, f_n, f lebesgueovsky měřitelné (tzn. $f_n, f \in M(\Omega)$), pak následující výroky jsou ekvivalentní:

(1) $f_n \to f$ s.v. v Ω

(2) $\forall \varepsilon > 0 \;\exists E_\varepsilon \subset \Omega$, lebesgueovsky měřitelná, tak, že

- $\lambda_d(E_\varepsilon) < \varepsilon$
- $f_n \rightrightarrows f$ v $\Omega \setminus E_\varepsilon$

Dk $\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Položme $E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$. Pak $\lambda_d(E) = 0$ a

$$f_n(x) \to f(x) \text{ pro } \forall x \in \Omega \setminus E.$$

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Buď $E \in \Lambda(\Omega)$, $\lambda_d(E) = 0$, tak, že pro $\forall x \in \Omega \setminus E$: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Uvažme množiny

$$\Omega_{k,i} := \left\{ x \in \Omega \setminus E;\ |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{i} \text{ pro } \forall m \geq k \right\}$$

(tyto množiny jsou měřitelné).

Pozorujeme, že pro libovolné pevné $i \in \mathbb{N}$ platí:

$$\Omega \setminus E \subset \bigcup_k \Omega_{k,i} \quad \text{a} \quad \Omega_{k,i} \subset \Omega_{k+1,i}$$

a tedy

$$\lambda_d(\Omega \setminus \Omega_{k,i}) \to 0 \text{ pro } k \to +\infty.$$

Tedy, pro dané $\varepsilon > 0$ a pro $\forall i \in \mathbb{N}$, existuje k_i tak, že

$$\lambda_d(\Omega \setminus \Omega_{k_i,i}) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Položme

$$\Omega_\varepsilon := \bigcap_i \Omega_{k_i,i} \quad \text{a} \quad E_\varepsilon := \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$$

Pak

$$\lambda_d(E_\varepsilon) \leq \varepsilon \quad \text{a}$$

$$\sup_{x \in \Omega_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{i} \quad \forall i \text{ a } \forall n \geq k_i,$$

tedy

$$f_n \rightrightarrows f \text{ v } \Omega \setminus E_\varepsilon.$$

▶ Prostory $L^p(\Omega)$ jsou pro $p \in \langle 1, +\infty)$ separabilní. Prostor $L^\infty(\Omega)$ NENÍ separabilní. (Vskutku, uvažujme systém všech podintervalů $I \subset \langle 0,1\rangle$, který je nespočetný. Pak $\|\chi_I - \chi_J\|_\infty = 1$ pokud $\lambda_d(I \setminus J) + \lambda_d(J \setminus I) > 0$. Nelze tedy vybrat spočetný podsystém, který by aproximoval tyto funkce, natož funkce v celém $L^\infty(\Omega)$.)

▶ Ukážeme si v 3. ročníku (nebo v LS), že funkce z

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ \underline{f \in C^\infty(\Omega)},\ \operatorname{supp} f := \text{uzávěr}\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\} \text{ je kompaktní v } \Omega.\}$$

(zde $\underline{\Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ otevřené}}$.)

jsou husté v $L^p(\Omega)$, pro $1 \le p < +\infty$.

— · —