DÚ8 | Jonáš Dujava

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_0^{\pi} \underbrace{\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}}_{f(x,a)}\,dx$

aby bola vôbec definovaná funkcia $\ln(1+a\cos x)$ musí platiť pre $x\in(0,\pi)$ $1+a\cos x>0 \Rightarrow \boxed{|a|\le 1}$

Pre $\forall a\in\langle -1;1\rangle$ je $x\mapsto f(x,a)$ spojitá na $(0,\pi)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{merateľná}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+a\cos x)}{a\cos x}\,a = a$

v $x=\frac{\pi}{2}$ dodefinujeme

Parciálna derivácia

$$\boxed{\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}=\frac{1}{1+a\cos x}}$$

vlastná pre $\forall a\in(0,1)$ $\forall x\in(0,\pi)$

$\frac{\partial f}{\partial a}>0$, $(R)\int$

Pre ľubovoľné $a\in(-1,1)$ je $\frac{\partial f}{\partial a}$ $\boxed{\text{konečná, spojitá}}$ $\Rightarrow \exists$ majoranta, (resp. $\exists\,(R)\int=(L)\int$)

tady bych potřeboval vidět, jak majoranta vypadá, na $(-1,+1)$ int. majoranta neexistuje! $-0{,}1$

Pre $\boxed{a_0=0}$ platí $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x,a)\,dx=\int_0^{\pi}0=0$

$u=\tan\frac{x}{2}\to dx=\frac{2}{1+u^2}du$ $\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$

Zámena $\frac{d}{da}$ a $\int$ $\Longrightarrow$

$$\frac{dI}{da}=(R)\int_0^{\pi}\frac{1}{1+a\cos x}dx=(R)\int_0^{\infty}\frac{2\,du}{\left(1+a\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)(1+u^2)}=2\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2+a-au^2}=2\int_0^{\infty}\frac{1}{1+a}\,\frac{du}{1+\frac{1-a}{1+a}u^2}=$$

$\boxed{a=0}\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi}1\,dx=\pi$

$$=\frac{2}{1+a}\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,u\right)\right]_0^{\infty}=\boxed{\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\quad\text{pre } a\in(-1,1)}$$

$$\Longrightarrow I(a)=\pi\int\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}da=\pi\arcsin(a)+C \overset{I(a=0)=0}{=\!=\!=} \boxed{\pi\arcsin(a)}\quad\text{pre } a\in(-1,1)$$

$f(x,a)$ je monotónna v $\boxed{a}$ (vyplýva z $\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} = \frac{1}{1+a\cos x} > 0$ pre $\forall a \in [-1,1]$, $\forall x \in (0,\pi)$),

Výmena lim a $\int$ použitím $\boxed{\text{Leviho vety}}$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{a\to\pm 1} I(a) = \pi \arcsin(\pm 1) \Longrightarrow \boxed{I(a) = \pi\arcsin(a) \text{ na } [-1,1]}$

$\boxed{2}$ $I(a,b) = \int\limits_0^1 \underbrace{\frac{x^b - x^a}{\ln x}}_{f(x,a,b)} dx$ pre $\boxed{b=a}$ ľubovoľné $\boxed{I(a,b) = I(a,a) = \int\limits_0^1 0\, dx = 0}$

Uvažujme teda $\boxed{b \neq a}$ a BÚNO $\boxed{b > a}$, potom $x \mapsto f(x,a,b)$ je spojitá a nemení znamienko na $(0,1)$ $\Longrightarrow x \mapsto f(x,a,b) \in \mathcal{L}^*((0,1))$ (a $(\mathcal{L})\int = (\mathcal{N})\int$)

Môžeme teda použiť substitúciu $u = -\log x$ $(x = e^{-u})$ $\longrightarrow du = \frac{-1}{x} dx$, $= -e^{u} dx$ čím prechádzame

k $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_\infty^0 \frac{(e^{-u})^b - (e^{-u})^a}{-u e^{u}} (-du) = -\int_0^\infty \frac{e^{-(b+1)u} - e^{-(a+1)u}}{u} du$ ktorý zjavne (ak $b \neq a$) nekonverguje pre $b+1 \leq 0$ (alebo $a+1 \leq 0$)

↳ pretože $I(a<b, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-(b+1)u}}{u} (1 - e^{(b-a)u}) du$ nekonverguje,

keďže od určitého u platí $(1 - e^{(b-a)u}) < \delta < 0$ resp. $> \delta > 0$ a $\int_0^\infty \frac{e^{-(b+1)u}}{u} \geq \int_0^\infty \frac{1}{u} \longrightarrow \infty$

$\boxed{\text{Riešme prípad } 1+b>0,\ 1+a>0}$ $\quad \frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{e^{-(b+1)u} - e^{-(a+1)u}}{-u}\right) = -e^{-(a+1)u}$ $\boxed{> 0}$? a $\boxed{< \infty}$

nezáporné konečné

Pre $\boxed{a=b}$ triviálne $I(a,b)=0$

↳ monotónna v $\boxed{a, b}$

Môžeme použiť zámenu $\frac{\partial}{\partial a}$ a $\int dx$ (Leviho verzia)

$\Longrightarrow \frac{\partial I(a,b)}{\partial a} = \int_0^\infty -e^{-(a+1)u} du = \left[+\frac{e^{-(a+1)u}}{a+1}\right]_0^\infty = \frac{-1}{a+1} \Longrightarrow I = \ln(1+a) + C(b)$

$\Longrightarrow I(a,b) = -\ln(1+a) + C(b) \underset{\overline{\overline{}}}{\overset{I(b,b)=0}{}} -\ln(1+a) + \ln(1+b) = \boxed{\ln\frac{1+b}{1+a}}$