Termín pro odevzdání: čtvrtek 1. dubna 2021

Uvažujte funkci

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}, \quad z \in \mathbb{C} \ .$$

1. Rozviňte $f(z)$ do Laurentovy řady v $\mathcal{U}_{0,b}(2)$ (mezikruží kolem bodu $z_0 = 2$ s vnitřním poloměrem 0 a vnějším poloměrem b), kdy zároveň určíte maximální možnou hodnotu b. Diskutujte tvar hlavní části Laurentovy řady v souvislosti se singularitami funkce $f(z)$.

2. Rozviňte $f(z)$ do Laurentovy řady v $\mathcal{U}_{1,2}(0)$.

Řešení:

1. Můžeme postupovat tak, že lomený výraz rozložíme na parciální zlomky,

$$\frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{(z^2+1) - 2(z-2)}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1} = \frac{1}{z-2} - 2\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\frac{1}{2i} = \frac{1}{z-2} + \frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i}, \quad z \neq 2, \pm i \ .$$

Nalézáme póly $f(z)$ násobnosti 1 v bodech $z = 2, \pm i$. Maximální vnější poloměr mezikruží v úloze 1 je tedy vzdálenost od bodu $z_0 = 2$ k pólům $\pm i$, $b = |2 - i| = \sqrt{5}$. Funkce $f(z)$ je holomorfní na $\mathcal{U}_{0,\sqrt{5}}(2)$, tedy podle Věty 15.10 z přednášky tam má jednoznačně určenou Laurentovu řadu.

Výraz $(z-2)^{-1}$ již je sám sobě Laurentovou řadou v $z_0 = 2$. Zbylé dva členy upravíme tak, abychom identifikovali součet konvergentní geometrické řady, kterou rozvineme:

$$\frac{i}{z-i} = \frac{i}{(z-2)+2-i} = \frac{i}{2-i}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2-i}} = \frac{i}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2-i}\right)^n = i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2-i)^{n+1}}(z-2)^n \ ,$$

$$\frac{i}{z+i} = \ldots = i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}}(z-2)^n \ .$$

Celkově

$$\begin{aligned}
f(z) &= (z-2)^{-1} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2-i)^{n+1}} - \frac{1}{(2+i)^{n+1}}\right](z-2)^n \\
&= (z-2)^{-1} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}}{[(2-i)(2+i)]^{n+1}}(z-2)^n \\
&= (z-2)^{-1} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}\left[(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}\right](z-2)^n \ , \quad 0 < |z-2| < \sqrt{5} \ ,
\end{aligned}$$

což je výsledná Laurentova řada. První člen je hlavní část a druhý člen (suma) je regulární část řady. Rozvíjíme kolem bodu $z_0 = 2$, což je pól násobnosti 1. To odpovídá hlavní části Laurentovy řady, která obsahuje jen člen $n = -1$, a kde členy pro $n \leq -2$ jsou nulové.

2. Hledáme Laurentovu řadu na $\mathcal{U}_{1,2}(0)$, kde je $f(z)$ holomorfní; pól $z = 2$ leží na vnější hranici a póly $z = \pm i$ leží na vnitřní hranici mezikruží. Pracujeme s rozkladem

$$\frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1}$$

a opět upravíme do tvaru součtů geometrických řad,

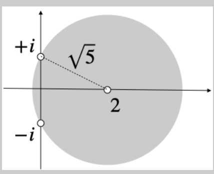
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad |z| < 2 \ ,$$

$$\frac{2}{z^2+1} = -\frac{2}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = -\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n, \quad |z| > 1 \ .$$

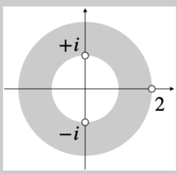
Celkově

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}} \ , \quad 1 < |z| < 2 \ ,$$

kde první suma je regulární část a druhá suma je hlavní část výsledné Laurentovy řady. Regulární i hlavní část mají v tomto případě nekonečný počet členů.



Obrázek k úloze 1



Obrázek k úloze 2