Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	8	10	8	10	36
Získáno					

[8] 1. Nalezněte všechny singularity funkce f definované vztahem

$$f(z) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{z(1+\mathrm{e}^{az})},$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$ je dané kladné reálné číslo. Pro každou singularitu určete její typ a spočtěte reziduum.

Řešení:

Zjistíme, ve kterých bodech je jmenovatel roven nule, jeden takovýto bod je zřejmě

$$z = 0,$$

a tento bod je zjevně jednoduchým pólem zkoumané funkce. Dále je potřeba najít kořeny rovnice

$$1 + \mathrm{e}^{az} = 0,$$

což je ale snadné (nesmíme zapomenout na mnohoznačnost používaných funkcí)

$$z_k = \frac{(2k-1)\pi}{a}\mathrm{i}, \; k \in \mathbb{Z},$$

Nalezené kořeny rovnice $1 + \mathrm{e}^{az}$ jsou jednonásobné. To lze například nahlédnout z Laurentovy řady funkce $1 + \mathrm{e}^{az}$, skutečně

$$1 + \mathrm{e}^{az} = 1 + \mathrm{e}^{-az_k + a(z+z_k)} = 1 - \mathrm{e}^{a(z+z_k)} = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z+z_k)^k}{k!} = (z+z_k) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(z+z_k)^{k-1}}{k!}.$$

Protože jsou kořeny rovnice $1 + \mathrm{e}^{az}$ jednonásobné, zkoumaná funkce bude v těchto bodech mít jednonásobné póly. Rezidua spočteme dle věty

> Buďte $f(z)$, $g(z)$ holomorfní funkce na okolí bodu z_0 a nechť má funkce $g(z)$ v bodu z_0 kořen násobnosti jedna, pak
> $$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \left.\frac{f(z)}{g'(z)}\right|_{z=z_0}.$$

v našem případě tedy

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z(1+\mathrm{e}^{az})} = \left.\frac{1}{1+\mathrm{e}^{az}}\right|_{z=0} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{res}_{z=z_k} \frac{1}{z(1+\mathrm{e}^{az})} = \left.\frac{1}{az\mathrm{e}^{az}}\right|_{z=z_k} = -\frac{1}{a\frac{(2k-1)\pi}{a}\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{(2k-1)\pi}.$$

[10] 2. Pomocí integrace vhodné komplexní funkce spočtěte integrál

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Integrál

$$I =_{\mathrm{def}} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\mathrm{d}x.$$

spočteme pomocí integrace funkce $f(z)$,

$$f(z) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}$$

přes křivku $\boldsymbol{\gamma}_R =_{\mathrm{def}} \boldsymbol{\gamma}_R^1 + \boldsymbol{\gamma}_R^2$ naznačenou na Obrázku 1 a následným limitním přechodem $R \to +\infty$. Parametrizace jednotlivých křivek jsou

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_R^1 &\colon z = t, && t \in [-R, R], \\ \boldsymbol{\gamma}_R^2 &\colon z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, && t \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Platí

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{t=-R}^{R} \frac{1}{(t^2+1)^2(t^2+4)}\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^2(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+4)}\mathrm{d}t.$$

Integrál na levé straně lze spočíst podle residuové věty

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a \in A} \mathrm{res}_a\, f(z),$$

kde A jsou všechny singularity funkce f uvnitř křivky $\boldsymbol{\gamma}_R$. Funkce f má zjevně sinbularity v bodech $\pm\mathrm{i}$ a $\pm 2\mathrm{i}$, uvnitř křivky $\boldsymbol{\gamma}_R$ leží (pro dostatečně velké R) pouze body i a 2i. Bod i je pól násobnosti dva, bod 2i je pól násobnosti jedna. Residuová věta tedy říká, že

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{res}_{\mathrm{i}}\, f(z) + \mathrm{res}_{2\mathrm{i}}\, f(z)\right).$$

Residua spočteme s využitím dostupných vět. Pro výpočet residua v jednonásobném pólu 2i použijeme tvrzení

> Buďte $f(z)$, $g(z)$ holomorfní funkce na okolí bodu z_0 a nechť má funkce $g(z)$ v bodu z_0 kořen násobnosti jedna, pak
> $$\mathrm{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \left.\frac{f(z)}{g'(z)}\right|_{z=z_0}.$$

Platí tedy

$$\mathrm{res}_{2\mathrm{i}}\, f(z) = \mathrm{res}_{2\mathrm{i}} \frac{1}{(z^2+1)^2}\frac{1}{z^2+4} = \left.\frac{1}{(z^2+1)^2}\right|_{z=2\mathrm{i}} \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=2\mathrm{i}} = -\frac{1}{36}\mathrm{i}.$$

Pro výpočet residua v dvojnásobném pólu i použijeme tvrzení

> Buď $f(z)$ komplexní funkce, která má v bodě z_0 pól násobnosti nejvýše n, pak
> $$\mathrm{res}_{z_0}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right)\right).$$

V našem případě je $n = 2$, platí tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{\mathrm{i}}\, f(z) &= \lim_{z\to\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-\mathrm{i})^2\frac{1}{(z^2+1)^2}\frac{1}{z^2+4}\right)\right) \\ &= \lim_{z\to\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-\mathrm{i})^2\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2}\frac{1}{z^2+4}\right)\right) = \lim_{z\to\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2(z^2+4)}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{(z+\mathrm{i})^4(z^2+4)^2}\left.\left(2(z+\mathrm{i})(z^2+4) + 2(z+\mathrm{i})^2 z\right)\right|_{z=\mathrm{i}} = -\frac{1}{36}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Celkem tedy (pro dostatečně velké R) platí

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{36}\mathrm{i} - \frac{1}{36}\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{9}.$$

Na druhou stranu ovšem víme, že platí

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = I + \lim_{R\to+\infty}\int_{t=0}^{\pi}\frac{1}{(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^2(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+4)}.$$

Podaří-li se nám ukázat, že druhý integrál na pravé straně v limitě vymizí, dostaneme výsledek

$$I = \frac{\pi}{9}.$$

Zbývá ukázat, že skutečně platí

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{t=0}^{\pi}\frac{1}{(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^2(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+4)} = 0,$$

k čemuž použijeme první část Jordanova lemmatu, které zní takto:

> Buď $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$ a uvažujme funkci f spojitou na množině $A = \left\{z\in\mathbb{C}|\, z = R\mathrm{e}^{is}, R>\rho,\, s\in[\alpha,\beta]\right\}$, kde $\rho\in\mathbb{R}^+$ je dané kladné reálné číslo. Označme
>
> $$M_R =_{\mathrm{def}} \max_{z\in\boldsymbol{\gamma}_R}|f(z)|\,,$$
>
> kde křivka $\boldsymbol{\gamma}_R$ je kruhový oblouk o poloměru R vymezený úhly α a β, aneb
>
> $$\boldsymbol{\gamma}_R = \left\{z\in\mathbb{C}|\, z = R\mathrm{e}^{is},\, s\in[\alpha,\beta]\right\}.$$
>
> Pak platí:
>
> 1. Je-li $\lim_{R\to+\infty} RM_R = 0$, pak $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
> 2. Je-li $\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$ a je-li $[\alpha,\beta]\subset[0,\pi]$, pak $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\boldsymbol{\gamma}_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta z}f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, kde $\delta>0$ je libovolné kladné reálné číslo.

Potřebujeme tedy dokázat, že

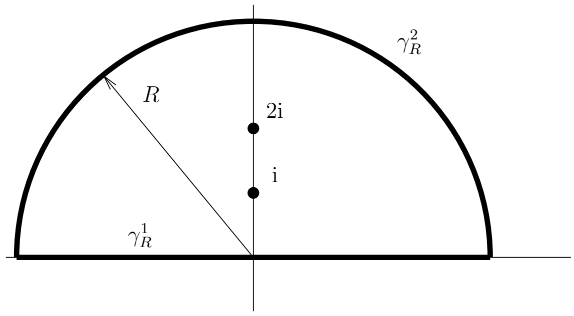
$$\lim_{R\to+\infty} RM_R = \lim_{R\to+\infty} R\max_{t=[0,\pi]}\left|\frac{1}{(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^2(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+4)}\right| = 0.$$

To je ovšem snadné. Použijeme důsledek trojúhleníkové nerovnosti

$$\frac{1}{|a-b|}\le\frac{1}{||a|-|b||},$$

a okamžitě dostaneme požadované. Vskutku, pro dostatečně velké R platí

$$R\max_{t\in[0,\pi]}\left|\frac{1}{(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+1)^2(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+4)}\right|\le R\frac{1}{(R^2-1)^2(R^2-4)}\overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$



Obrázek 1: Integrační křivka pro výpočet integrálu $\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)} \mathrm{d}x$.

[8] 3. Zkoumejte posloupnost $\{f_{\alpha,n}\}_{n=1}^{+\infty}$ jejíž jednotlivé členy jsou definovány jako

$$f_{\alpha,n}(x) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{\pi} \frac{(\sin nx)^2}{n\,|x|^\alpha},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. (Parametr α je stejný pro všechny členy posloupnosti. Čtěte pozorně, ve jmenovateli je výraz $n\,|x|^\alpha$ nikoliv $|nx|^\alpha$. Dále připomínáme, že platí $\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.)

a) Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ ve smyslu konvergence distribucí platí

$$T_{f_{\alpha,n}} \to \delta,$$

kde δ je Diracova distribuce v nule a $T_{f_{\alpha,n}}$ jsou regulární distribuce přiřazené lokálně integrovatelným funkcím $f_{\alpha,n}$.

b) Zjistěte, pro které hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ ve smyslu konvergence distribucí platí

$$T_{f_{\alpha,n}} \to 0.$$

Přesně specifikujte v jaké smyslu je konvergence definována.

Pozor! Ve zkouškové písemné práci byl příklad zadán takto

$$f_{\alpha,n}(x) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{\pi} \frac{(\sin nx)^2}{nx^\alpha},$$

což ovšem znamená, že pracujeme s funkcí x^α, která není pro $x \in \mathbb{R}^-$ a některé exponenty α dobře definovaná. Řešením zkouškové písemné práce tak mohlo být prosté konstatování “chcete po nás nesmysly”, za což byste získali plný počet bodů.

Řešení:

Chceme najít hodnotu parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, tak, aby pro každou testovací funkci φ platilo

$$\left\langle T_{f_{\alpha,n}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \to \left\langle T_\delta, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

kde konvergence je nyní standardní kovergence posloupnosti reálných čísel $\left\langle T_{f_{\alpha,n}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$, a kde Diracova distribuce T_δ je zavedena standardním způsobem jako $\left\langle T_\delta, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} =_{\mathrm{def}} \varphi(0)$. Musíme proto ukázat, že pro každou testovací funkci φ dostaneme

$$\left\langle T_{f_{\alpha,n}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \to \varphi(0).$$

(Ve smyslu posloupnosti čísel.) Dualita $\left\langle T_{f_{\alpha,n}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$ je reprezentována integrálem, neboť $f_{\alpha,n}$ jsou lokálně integrovatelné funkce

$$\left\langle T_{f_{\alpha,n}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{\alpha,n}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Využíváme standardního ztotožnění lokálně integrovatelných funkcí s příslušnými distribucemi.) Po překladu definic do primitivních pojmů tedy chceme ukázat, že pro každou testovací funkci φ dostaneme

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{\alpha,n}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0)$$

Obdobně v druhé otázce chceme najít hodnotu parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, tak, aby pro každou testovací funkci φ platilo

$$\left\langle T_{f_{\alpha,n}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \to 0.$$

Nyní již musíme počítat. Buď $\operatorname{supp} \varphi \subset (-K, K)$. Jest

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{\alpha,n}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=-K}^{K} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 nx}{n\,|x|^\alpha} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} y = nx \\ \mathrm{d}y = n\,\mathrm{d}x \end{vmatrix}$$
$$= \int_{y=-nK}^{+nK} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 y}{n^{1-\alpha}\,|y|^\alpha} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) \frac{1}{n}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{y=-nK}^{+nK} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \varphi\left(\frac{y}{n}\right) |y|^{2-\alpha} n^{\alpha-2}\,\mathrm{d}y \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{\varphi(0)}{\pi} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \mathrm{d}y = \varphi(0)\,, & \alpha = 2, \\ 0, & \alpha \in (1,2), \\ 0, & \alpha \in (-\infty, 1]. \end{cases}$$

Při diskusi chování vůči parametru α vycházíme z toho, že asymptotické chování integrandu $\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 y^{2-\alpha}$ je

$$\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 y^{2-\alpha} \approx \frac{1}{y^{\alpha-2}}, \text{ pro } y \to 0+,$$
$$\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 y^{2-\alpha} \approx \frac{1}{y^{\alpha}}, \text{ pro } y \to +\infty,$$

což si, pokud chceme aby byl integrál $\int_{y=-nK}^{nK} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \varphi\left(\frac{y}{n}\right) |y|^{2-\alpha} n^{\alpha-2}\,\mathrm{d}y$ konečný pro libovolné n, vynucuje podmínky $\alpha - 2 < 1$ a $\alpha > 1$, aneb $\alpha \in (1,3)$. Faktor $n^{\alpha-2}$ konverguje pro $n \to +\infty$ k nule pokud $\alpha < 2$, z čehož plyne výše uvedený výsledek pro $\alpha \in (1,2)$. Podrobný výpočet by proběhl takto,

$$0 \leq \left| \int_{y=-nK}^{+nK} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \varphi\left(\frac{y}{n}\right) |y|^{2-\alpha} n^{\alpha-2}\,\mathrm{d}y \right|$$
$$\leq \operatorname{supp}_{z\in(-K,K)} |\varphi(z)|\, n^{\alpha-2} \int_{y=-nK}^{+nK} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 |y|^{2-\alpha}\,\mathrm{d}y \leq C \operatorname{supp}_{z\in(-K,K)} |\varphi(z)|\, n^{\alpha-2} \xrightarrow{n\to+\infty,\ \alpha\in(1,2)} 0,$$

kde C je nějaká konstanta, $C =_{\mathrm{def}} \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 |y|^{2-\alpha}\,\mathrm{d}y$.

Pokud chceme prozkoumat chování limity v složitějším případě $\alpha < 1$, musíme pečlivě vyšetřit chování klíčového intergrálu $\int_{y=-nK}^{+nK} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 |y|^{2-\alpha}\,\mathrm{d}y$ v závislosti na n. Před integrálem totiž stojí faktor $n^{\alpha-2}$, a ten by případně mohl potlačit růst v integrálu. Počítejme

$$0 \leq \int_{y=-nK}^{+nK} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 |y|^{2-\alpha}\,\mathrm{d}y \leq 2\int_{y=0}^{1} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 |y|^{2-\alpha}\,\mathrm{d}y + 2\int_{y=1}^{+nK} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 |y|^{2-\alpha}\,\mathrm{d}y$$
$$\leq 2D + 2\int_{y=1}^{+nK} \frac{1}{|y|^\alpha}\,\mathrm{d}y = 2D + 2\left[y^{-\alpha+1}\right]_{y=1}^{+nK} = 2D + 2 + (nK)^{-\alpha+1},$$

kde D je nějaká konstanta, konkrétně $D =_{\mathrm{def}} \int_{y=0}^{1} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 |y|^{2-\alpha}\,\mathrm{d}y$. Celkem tedy dostaneme

$$0 \leq \left| \int_{y=-nK}^{+nK} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \varphi\left(\frac{y}{n}\right) |y|^{2-\alpha} n^{\alpha-2}\,\mathrm{d}y \right|$$
$$\leq \operatorname{supp}_{z\in(-K,K)} |\varphi(z)|\, n^{\alpha-2} \int_{y=-nK}^{+nK} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 |y|^{2-\alpha}\,\mathrm{d}y \leq \operatorname{supp}_{z\in(-K,K)} |\varphi(z)|\, n^{\alpha-2} \left(2D + 2 + (nK)^{-\alpha+1}\right)$$
$$\leq \operatorname{supp}_{z\in(-K,K)} |\varphi(z)|\, n^{\alpha-2} (2D+2) + \operatorname{supp}_{z\in(-K,K)} |\varphi(z)|\, n^{-1} K^{-\alpha+1} \xrightarrow{n\to+\infty,\ \alpha\in(-\infty,1)} 0.$$

Pro $\alpha = 1$ se v integrálu objeví logaritmus, na hodnotě limity to však nic nezmění.

[10] 4. Najděte Fourierovu transformaci distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ zadané vztahem

$$T =_{\text{def}} (\cos 2x)\left(\delta'' + 2\delta' + \delta\right),$$

kde δ značí standardní Diracovu distribuci v nule, a δ' a δ'' značí první a druhou (distributivní) derivaci Diracovy distribuce. Vzorec pro Fourierovu transformaci Diracovy funkce a pravidla pro počítání s Fourierovou transformací považujte za známá, nemusíte je odvozovat.

Řešení:

Definice

$$T =_{\text{def}} (\cos 2x)\left(\delta'' + 2\delta' + \delta\right),$$

znamená, že akce distribuce T na testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je dána předpisem

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi \rangle &= \langle (\cos 2x)\,\delta'', \varphi \rangle + 2\,\langle (\cos 2x)\,\delta', \varphi \rangle + \langle (\cos 2x)\,\delta, \varphi \rangle \\
&\overset{\text{násobení } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ funkcí}}{=} \langle \delta'', (\cos 2x)\,\varphi \rangle + 2\,\langle \delta', (\cos 2x)\,\varphi \rangle + \langle \delta, (\cos 2x)\,\varphi \rangle \\
&\overset{\text{vlastnosti } \delta \text{ distribuce}}{=} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[(\cos 2x)\,\varphi(x)\right]\Big|_{x=0} - 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(\cos 2x)\,\varphi(x)\right]\Big|_{x=0} + (\cos 2x)\,\varphi(x)\big|_{x=0} \\
&= \left[-4\,(\cos 2x)\,\varphi(x) - 4\,(\sin 2x)\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + (\cos 2x)\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}\right]\Bigg|_{x=0} - 2\left[-2\,(\sin 2x)\,\varphi(x) + (\cos 2x)\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_{x=0} + \varphi(x)\big|_{x=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0} - 2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} - 3\,\varphi(x)\big|_{x=0} = \langle \delta'', \varphi \rangle + 2\,\langle \delta', \varphi \rangle - 3\,\langle \delta, \varphi \rangle = \langle \delta'' + 2\delta' - 3\delta, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

kde jsme využili definice násobení distribuce $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ funkcí a definice Diracovy distribuce a jejích derivací,

$$\begin{aligned}
\langle \delta', \psi \rangle &= -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}, \\
\langle \delta'', \psi \rangle &= \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0},
\end{aligned}$$

kde $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Můžeme tedy konstatovat, že ve smyslu rovnosti distribucí platí

$$(\cos 2x)\left(\delta'' + 2\delta' + \delta\right) = \delta'' + 2\delta' - 3\delta.$$

Nyní můžeme snadno spočíst Fourierovu transformaci. Použijeme-li definici Fourierovy transformace z přednášky, to jest

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right](\xi) =_{\text{def}} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi}\,\mathrm{d}x,$$

pak víme, že pro Fourierovu transformaci n-té derivace, $n \in \mathbb{N}$, a pro Fourierovu transformaci Diracovy distribuce platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x)\right](\xi) &= (2\pi\mathrm{i}\xi)^n\,\mathcal{F}\left[f(x)\right](\xi), \\
\mathcal{F}\left[\delta(x)\right](\xi) &= 1,
\end{aligned}$$

z čehož okamžitě plyne, že

$$\mathcal{F}\left[T\right](\xi) = \mathcal{F}\left[\delta'' + 2\delta' - 3\delta\right](\xi) = -4\pi^2\xi^2 + 4\pi\mathrm{i}\xi - 3.$$