Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	**Celkem bodů**
Bodů	8	10	12	30
Získáno				

[8] 1. Uvažujte posloupnost distribucí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definovanou jako

$$f_n(x) = n^2 \left[\delta\left(x - \frac{1}{n}\right) - 2\delta(x-0) + \delta\left(x + \frac{1}{n}\right)\right],$$

kde $\delta(x-a)$ značí Diracovu distribuci v bodě a. Najděte limitu

$$f = \lim_{n\to+\infty} f_n$$

této posloupnosti, aneb spočtěte

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left[\delta\left(x - \frac{1}{n}\right) - 2\delta(x-0) + \delta\left(x + \frac{1}{n}\right)\right],$$

přičemž limitou se myslí limita posloupnosti ve smyslu distribucí. Přesně specifikujte v jaké smyslu je konvergence definována.

Řešení:

Chceme ukázat, že pro každou testovací funkci φ platí

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} \to \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

kde konvergence je nyní standardní kovergence posloupnosti reálných čísel $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$. Diracova distribuce s nosičem v bodě y tedy $\delta(x-y)$ aneb $T_{\delta(x-y)}$ je definována jako

$$\left\langle T_{\delta(x-y)}, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} =_{\mathrm{def}} \varphi(y)$$

Dualita $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}$ je tedy

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \left\langle n^2 \left[T_{\delta\left(x-\frac{1}{n}\right)} - T_{2\delta(x-0)} + T_{\delta\left(x+\frac{1}{n}\right)}\right], \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = n^2 \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - 2\varphi(0) + \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right).$$

Zbývá tedy spočíst limitu, což je ovšem snadné

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - 2\varphi(0) + \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = \left.\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}.$$

Tento výsledek je zřejmý kupříkladu z Taylorova rozvoje

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi(0) + \left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

či případně dvojnásobné aplikace l'Hospitalova pravidla. Zjistili jsme, že platí

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \left.\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0},$$

přičemž pravou stranu lze zapsat jako dualitu mezi druhou derivací Diracovy distribuce s nosičem v bodě 0 a testovací funkcí φ. Pro každou testovací funkci tedy platí

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_{f_n}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \left\langle T_{\delta''(x-0)}, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})},$$

odkud

$$\lim_{n\to+\infty} T_{f_n} = T_{\delta''(x-0)}$$

aneb

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left[\delta\left(x - \frac{1}{n}\right) - 2\delta(x-0) + \delta\left(x + \frac{1}{n}\right)\right] = \delta''(x-0).$$

[10] 2. Pro $x \in \mathbb{R}$ řešte na prostoru regulárních distribucí rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - 6f = a\delta(x-0),$$

kde $\delta(x-y)$ značí Diracovu distribuci v bodě y a $a \in \mathbb{R}^+$ je parametr, a kde vyžadujeme $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Řešení:

Rovnici přepíšeme jako systém rovnic prvního řádu, je-li

$$g = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

pak původní rovnice přeje na

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix},$$

což lze symbolicky zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{b},$$

kde

$$\boldsymbol{y} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{A} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}.$$

Řešení úlohy bydeme hledat ve tvaru

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_+ H + \boldsymbol{y}_-\left(1 - H\right),$$

kde H značí Heavisideovu distribuci, která je definována jako regulární distribuce přiřazená lokálně integrovatelné funkci

$$H = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

a kde $\boldsymbol{y}_\pm$ jsou hladké funkce. Dosadíme-li takto definovanou funkci do diferenciální rovnice $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{b}$, dostaneme s použitím vztahu $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\delta}$ a s použitím pravidel pro práci s distribucemi rovnici

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_-}{\mathrm{d}x} - \mathbb{A}\boldsymbol{y}_-\right)(1-H) + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_+}{\mathrm{d}x} - \mathbb{A}\boldsymbol{y}_+\right)H + \left(-\boldsymbol{y}_- + \boldsymbol{y}_+ - \boldsymbol{b}\right)\delta = \boldsymbol{0}.$$

Z této rovnice vidíme, že musí platit

$$\begin{aligned} x < 0: \quad & \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_-}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\boldsymbol{y}_-, \\ x > 0: \quad & \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_+}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\boldsymbol{y}_+, \end{aligned}$$

a také

$$-\lim_{x\to 0-}\boldsymbol{y}_- + \lim_{x\to 0+}\boldsymbol{y}_+ - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

Řešením rovnic jsou funkce

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_\pm}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\mathbb{A}x}\boldsymbol{C}_\pm,$$

kde $\boldsymbol{C}_\pm$ je konstatní vektor. Maticovou exponenciálu nemusíme explicitně počítat, stačí si uvědomit, že diferenciální rovnici prvního řádu $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_-}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\boldsymbol{y}_-$, lze zapsat jako diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_-}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}f_-}{\mathrm{d}x} - 6f_- = 0,$$

kde

$$\boldsymbol{y}_- = \begin{bmatrix} f_- \\ g_- \end{bmatrix}.$$

Rovnici pro f_- snadno vyřešíme, výsledkem je

$$f_- = A_-\mathrm{e}^{-3x} + B_-\mathrm{e}^{2x},$$

kde A_- a B_- jsou konstanty, které musíme určit z okrajových podmínek. Chceme aby platilo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f = 0,$$

což znamená, že požadujeme $\lim_{x\to-\infty} f_- = 0$, odkud plyne, že $A_- = 0$. Řešením je tedy funkce

$$f_- = B_- \mathrm{e}^{2x},$$

což znamená, že

$$\boldsymbol{y}_- = B_- \mathrm{e}^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(Připomeňme-si, že druhá složka vektoru $\boldsymbol{y}_-$ je definována jako $\frac{\mathrm{d}f_-}{\mathrm{d}x}$.) Obdobně postupujeme i pro funkci $\boldsymbol{y}_+$. Diferenciální rovnici prvního řádu $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_+}{\mathrm{d}x} = \mathbb{A}\boldsymbol{y}_+$, lze zapsat jako diferenciální rovnici druhého řádu

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_+}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}f_+}{\mathrm{d}x} - 6f_+ = 0,$$

kde

$$\boldsymbol{y}_+ = \begin{bmatrix} f_+ \\ g_+ \end{bmatrix}.$$

Rovnici pro f_+ snadno vyřešíme, výsledkem je

$$f_+ = A_+ \mathrm{e}^{-3x} + B_+ \mathrm{e}^{2x},$$

kde A_+ a B_+ jsou konstanty, které musíme určit z okrajových podmínek. Chceme aby platilo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f = 0,$$

což znamená, že požadujeme $\lim_{x\to+\infty} f_+ = 0$, odkud plyne, že $B_+ = 0$. Řešením je tedy funkce

$$f_+ = A_+ \mathrm{e}^{-3x},$$

což znamená, že

$$\boldsymbol{y}_+ = A_+ \mathrm{e}^{-3x} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Doposud jsme zjistili, že platí

$$\boldsymbol{y}_- = A_- \mathrm{e}^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_+ = B_+ \mathrm{e}^{-3x} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Zbývá určit hodnotu konstant A_- a B_+. K tomu použijeme skokovou podmínku

$$-\lim_{x\to 0-} \boldsymbol{y}_- + \lim_{x\to 0+} \boldsymbol{y}_+ + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

která vede na soutavu rovnic

$$-A_- \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + B_+ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pro A_- a B_+. Řešením je

$$A_- = -\frac{a}{5}$$
$$B_+ = -\frac{a}{5},$$

a řešením zadané rovnice je tudíž regulární distribuce přiřazená funkci

$$f = \begin{cases} -\frac{a}{5}\mathrm{e}^{2x}, & x < 0 \\ -\frac{a}{5}\mathrm{e}^{-3x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Úlohu lze také vyřešit s použitím Fourierovy transformace. Použijeme Fourierovu transfroamci definovanou vztahem

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{\xi}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme. S použitím standardních pravidel pro práci s Fourierovou transformací zjistíme, že Fourierova transformace rovnice je

$$\mathcal{F}[f] \left(-\xi^2 - \mathrm{i}\xi - 6\right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}},$$

kde jsme také využili známého vztahu pro Fourierovu transformaci Diracovy distribuce. Platí tedy

$$\mathcal{F}[f] = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\left(-\xi^2 - \mathrm{i}\xi - 6\right)},$$

odkud

$$f = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{a}{\sqrt{2\pi}\left(-\xi^2 - \mathrm{i}\xi - 6\right)}\right].$$

Zbývá tedy spočíst inverzní Fourierovu transformaci. Výraz $\left(-\xi^2 - \mathrm{i}\xi - 6\right)$ rozložíme na parciální zlomky a výsledkem je

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{a}{\sqrt{2\pi}\left(-\xi^2 - \mathrm{i}\xi - 6\right)}\right] = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\right] - \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\left(\xi + 3\mathrm{i}\right)}\right]\right).$$

Spočteme inverzní Fourierovu transformaci obou sčítanců. Jest

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi,$$

a pro výpočet integrálu použijeme nástroje z komplexní analýzy. Budeme zkoumat integrál z komplexní funkce

$$g(z) =_{\mathrm{def}} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}}{5\left(z - 2\mathrm{i}\right)},$$

podél křivky $\boldsymbol{\gamma}_R$, kterou je kruhový oblouk o poloměru R v horní/dolní komplexní polorovině. Parametrizace oblouku v horní polorovině je $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in (0, \pi)$, parametrizace úsečky na reálné ose je $z = \xi$, $\xi \in (-R, R)$. Pro danou parametrizaci tedy platí

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\xi=-R}^{R}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\varphi=0}^{\pi}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}}{5\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 2\mathrm{i}\right)}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Jelikož je $\varphi \in (0, \pi)$ vidíme, že výraz

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xR\cos\varphi}\mathrm{e}^{xR\sin\varphi}$$

zůstává pro $R \to +\infty$ omezený pro $x < 0$. Přes kruhový oblouk v horní komplexní polorovině lze tedy integrovat pouze pro $x < 0$. Naopak, pro $x > 0$ musíme zvolit integraci přes kruhový oblouk v dolní komplexní polorovině. Zabývejeme se nyní případem $x < 0$. S použitím Jordanova lemmatu snadno ukážeme, že

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\xi=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi.$$

Podle reziduové věty ovšem platí, že

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\boldsymbol{\gamma}_R} g(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{z_s\in\mathrm{int}\boldsymbol{\gamma}_R}\, g(z).$$

V horní polorovině má funkce $g(z)$ jednu singularitu, a sice v bodě $z_s = 2\mathrm{i}$, a tato singularita je jednonásobným pólem. Residuum v bodě $z_s = 2\mathrm{i}$ je

$$\mathrm{res}_{z_s\in\mathrm{int}\boldsymbol{\gamma}_R} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{2x}}{5},$$

a proto pro $x < 0$ platí

$$\int_{\xi=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi = -2\pi\frac{\mathrm{e}^{2x}}{5}.$$

Pro $x > 0$ integrujeme přes kruhový oblouk v dolní komplexní polorovině, kde však funkce $g(z)$ nemá singularitu, a je proto

$$\int_{\xi=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Celkem tedy

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi - 2\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases}-\sqrt{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{5}, & x < 0,\\ 0, & x \geq 0.\end{cases}$$

Obdobně postupujeme při výpočtu inverzní Fourierovy transformace pro druhý člen, tedy při výpočtu integrálu

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\left(\xi + 3\mathrm{i}\right)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\left(\xi + 3\mathrm{i}\right)}\,\mathrm{d}\xi.$$

Integrál opět spočteme integrací funkce

$$g(z) =_{\mathrm{def}} \frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}xz}}{5\,(z+3\mathrm{i})}$$

podél vhodné křivky v komplexní rovině. Pro $x < 0$ volíme jako integrační křivku $\boldsymbol{\gamma}_R$ kruhový oblouk v horní komplexní polorovině, kde však funkce $g(z)$ nemá singularitu. Okamžitě tedy vidíme, že pro $x < 0$ platí

$$\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\,(\xi+3\mathrm{i})}\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Naopak, pro $x > 0$ integrujeme přes kruhový oblouk v dolní komplexní polorovině, kde má funkce $g(z)$ singularitu v bodě $z_s = -3\mathrm{i}$. Reziduová věta a Jordanovo lemma tak vede pro $x > 0$ k výsledku

$$\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\,(\xi+3\mathrm{i})}\,\mathrm{d}\xi = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{z_s=-3\mathrm{i}} \frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}xz}}{5\,(z+3\mathrm{i})} = 2\pi\frac{e^{-3x}}{5}.$$

(Jedno znaménko minus je kvůli orientaci integrační křivky.) Celkem tedy

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\,(\xi+3\mathrm{i})}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}x\xi}}{5\,(\xi+3\mathrm{i})}\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sqrt{2\pi}\frac{e^{-3x}}{5}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Pro hledanou funkci f proto dostaneme

$$f = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\,(\xi-2\mathrm{i})}\right] - \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathrm{i}}{5\,(\xi+3\mathrm{i})}\right]\right) = \begin{cases} -\frac{a}{5}e^{2x}, & x < 0, \\ -\frac{a}{5}e^{-3x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

což je kupodivu tentýž výsledek, jakého jsme dosáhli s použitím prvně studovaného postupu.

[12] 3. Buď $T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ distribuce zavedená jako

$$\left\langle T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} =_{\mathrm{def}} \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,\mathrm{d}x$$

a buď γ konstanta (Eulerova–Mascheroniova konstanta) definovaná jako

$$\gamma =_{\mathrm{def}} \int_{y=0}^{1} \frac{1-\cos y}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{y=1}^{+\infty} \frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y.$$

a) Ukažte, že pro Fourierovu transformaci distribuce $T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}}$ platí

$$\mathcal{F}\left[T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}}\right](\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\gamma + \ln|\xi|\right).$$

b) S pomocí výše uvedného vzorce pro Fourierovu transformaci distribuce $T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}}$ ukažte, že platí rovnost

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \ln|x|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = -\pi\left(T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|\xi|}} + 2\gamma T_{\delta(\xi-0)}\right).$$

Připomínáme, že Fourierova transformace je pro integrovatelné funkce definována vztahem

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme.

Řešení:

Fourierova transformaci distribuce jsme zavedli jako

$$\left\langle \mathcal{F}\left[T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}}\right], \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} =_{\mathrm{def}} \left\langle T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}}, \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})}.$$

S použitím definice Fourierovy transformace pro funkce a s použitím definice distribuce $T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}}$ dostaneme

$$\begin{aligned}\left\langle T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}}, \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} &= \int_{|x|<1} \frac{\mathcal{F}[\varphi(\xi)](x) - \mathcal{F}[\varphi(\xi)](0)}{|x|}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|>1} \frac{\mathcal{F}[\varphi(\xi)](x)}{|x|}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{|x|<1} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{|x|}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|>1} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi}{|x|}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Cílem je "osvobodit" testovací funkci φ tak, aby bylo možné pravou stranu přepsat ve tvaru akce nějaké distribuce na testovací funkci φ. Zabývejme se nejdříve druhým integrálem na pravé straně. Zaměníme pořadí integrace a dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{|x|>1} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi}{|x|}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left(\int_{|x|>1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}}{|x|}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left(\int_{x>1}\frac{\cos(x\xi)+\mathrm{i}\sin(x\xi)}{x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left(\int_{x<-1}\frac{\cos(x\xi)+\mathrm{i}\sin(x\xi)}{x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left(\int_{x>1}\frac{\cos(x\xi)}{x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

kde jsme využili sudosti/lichosti příslušných funkcí. Obdobně postupujeme i v případě prvně uvedeného integrálu. Jest

$$\begin{aligned}\int_{|x|<1} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{|x|}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left(\int_{|x|<1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}-1}{|x|}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left(\int_{x=-1}^{0}\left\{\frac{\cos(x\xi)-1}{x}+\mathrm{i}\frac{\sin(x\xi)}{x}\right\}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left(\int_{x=0}^{1}\left\{\frac{\cos(x\xi)-1}{x}+\mathrm{i}\frac{\sin(x\xi)}{x}\right\}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left(\int_{x=0}^{1}\frac{\cos(x\xi)-1}{x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

kde jsme opět využili sudosti/lichosti příslušných funkcí. Prozatím jsme tedy zjistili, že platí

$$\left\langle T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}}, \mathcal{F}[\varphi]\right\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \left(\int_{x=0}^{1} \frac{\cos(x\xi)-1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{+\infty} \frac{\cos(x\xi)}{x}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\xi.$$

Z integrálů vůči proměnné x musíme odstranit parametr ξ, což provedeme vhodnou substitucí, jest

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \left(\int_{x=0}^{1} \frac{\cos(x\xi)-1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{+\infty} \frac{\cos(x\xi)}{x}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\xi &= \left| \begin{matrix} y = x\xi \\ \mathrm{d}y = \xi \mathrm{d}x \end{matrix} \right| \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \left(\int_{y=0}^{\xi} \frac{\cos y - 1}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{y=\xi}^{+\infty} \frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Dále můžeme psát

$$\begin{aligned}\int_{y=0}^{\xi} \frac{\cos y-1}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{y=\xi}^{+\infty} \frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y &= \int_{y=0}^{1} \frac{\cos y-1}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{y=\xi}^{+\infty} \frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{y=1}^{\xi} \frac{\cos y-1}{y}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{y=0}^{1} \frac{\cos y-1}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{y=1}^{+\infty} \frac{\cos y}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{y=1}^{\xi} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\gamma - \int_{y=1}^{\xi} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\gamma - [\ln y]_1^{\xi} = -\gamma - \ln|\xi|,\end{aligned}$$

což znamená, že pro každou testovací funkce φ platí

$$\left\langle T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}}, \mathcal{F}[\varphi]\right\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})} = \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\gamma - \ln|\xi|\right) \mathrm{d}\xi = \left\langle -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\gamma + \ln|\xi|\right), \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}),\mathcal{S}(\mathbb{R})},$$

odkud vidíme, že

$$\mathcal{F}\left[T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}}\right](\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\gamma + \ln|\xi|\right).$$

Dokažme nyní platnost vzorce pro integrál

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \ln|x|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Víme, že platí

$$\mathcal{F}\left[T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}}\right](\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\gamma + \ln|\xi|\right).$$

Aplikací zpětné Fourierovy transformace na tento vztah dostaneme

$$T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\gamma \sqrt{2\pi} T_{\delta(x-0)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \ln|\xi|\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi \right),$$

kde jsme využili známý vztah pro Fourierovu transformaci Diracovy distribuce,

$$\mathcal{F}\left[T_{\delta(x-0)}\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

a definici zpětné Fourierovy transformace. Víme tedy, že platí

$$\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \ln|\xi|\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi = -\pi \left(2T_{\delta(x-0)} + T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}} \right),$$

v integrálu provedeme jednoduchou substituci $z = -\xi$ a výsledkem je

$$\int_{z=-\infty}^{+\infty} \ln|z|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}zx}\,\mathrm{d}z = -\pi \left(2T_{\delta(x-0)} + T_{\mathrm{p.v.}\frac{1}{|x|}} \right),$$

což jsme měli ukázat.